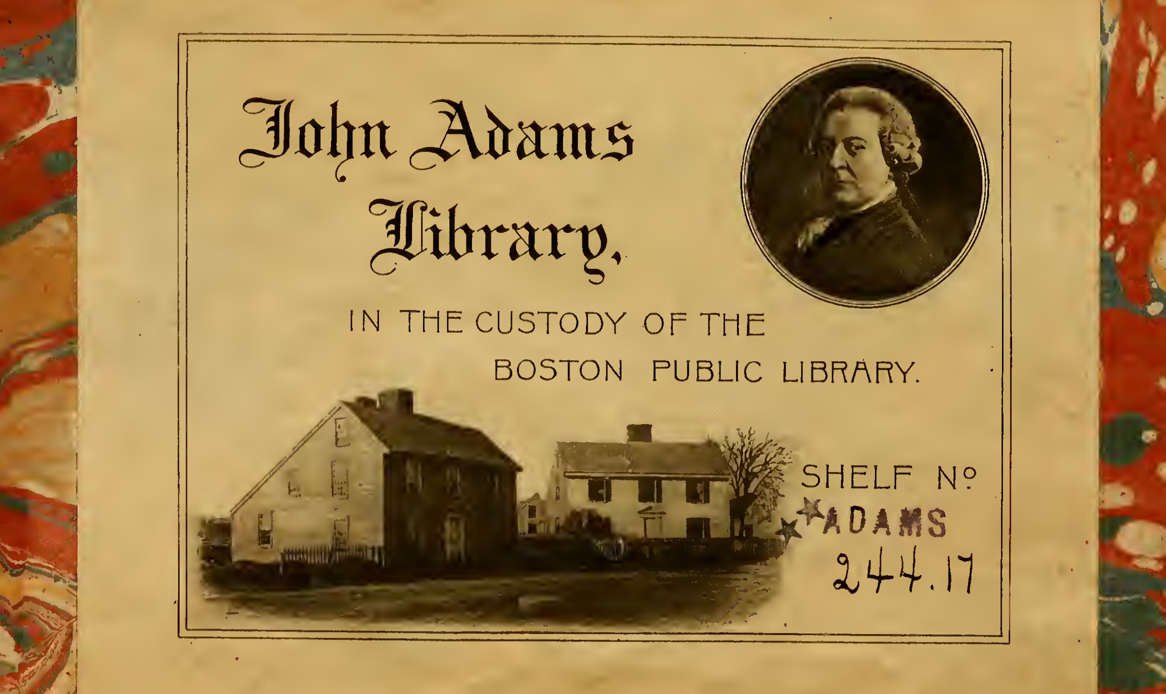



John Adams
Library,
IN THE CUSTODY OF THE
BOSTON PUBLIC LIBRARY.
SHELF No
*ADAMS
244.17



LES ÉLÉMENS D'EUCLIDE,

DU R. P. DÉCHALLES,

ET

DE M. OZANAM,

DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

Démontrés d'une maniere nouvelle & facile; & augmentés d'un grand nombre de nouvelles Propositions & de nouveaux Usages; & d'un Traité complet des Proportions arithmétiques & des Proportions géométriques.

Par M. AUDIERNE.

NOUVELLE EDITION, revue, corrigée & considérablement augmentée par l'Auteur.



A PARIS, RUE DAUPHINE,

Chez CL. ANT. JOMBERT, fils aîné, Libraire du Roi pour le Génie & l'Artillerie.

M. DCC. LXXVIII.

AVEC APPROBATION, ET PRIVILEGE DU ROI.

AVIS

SUR CETTE NOUVELLE EDITION.

Ces Elémens furent imprimés pour la premiere fois in-12 en 1746. On en fit une 2me édition, avec quelques changemens, en 1753; & c'est d'après cette seconde édition qu'on les a toujours réimprimés. Mais l'Auteur, profitant de toute l'expérience qu'il a acquise dans l'art d'enseigner, par un exercice continuel de plus de quarante années, vient de revoir tout son ouvrage avec la plus grande attention. Il en a simplifié toutes les démonstrations qui étoient susceptibles de l'être, & corrigé toutes celles auxquelles on auroit pu trouver quelque difficulté; de maniere qu'à présent tout y est à la portée de toutes les personnes qui le liront avec un peu d'attention.

Aux propositions supprimées dans le sixieme Livre, comme étant inutiles, il en a substitué de nouvelles qui rendent plus complette la théorie du cercle; & d'autres qui, quoique élémentaires, ne se trouvent qu'éparses dans différens Traités particuliers. Par ce moyen, il ne reste dans tous les élémens de Géométrie que l'on ne cesse de publier de-

puis plus de 50 ans, aucune proposition qui ne se trouve dans cette nouvelle édition.

Enfin, l'Auteur y a ajouté son Traité des proportions arithmétiques, qui n'avoit point encore été imprimé ; & quelques usages qui pourront devenir d'une pratique journaliere, & ne se trouvent nulle part.

Ce qui nous reste à dire sur cette nouvelle édition, c'est qu'il n'y a personne qui ne puisse entendre facilement & sans aucun secours étranger, tout ce qui y est démontré ; & lorsqu'on l'aura bien compris, on pourra se flatter avec justice, de bien sçavoir la Géométrie.

A l'égard du septieme Livre, du huitieme, du neuvieme & du dixieme, que l'on ne trouve point ici, il y a très-longtemps qu'on les a supprimés ; sçavoir le septieme, parce qu'il n'est qu'une répétition inutile du cinquieme, qui est précisément celui qu'Euclide a le plus mal traité : le huitieme & le neuvieme, parce qu'ils sont absolument étrangers à la Géométrie, & ne contiennent que quelques propriétés des nombres qui sont fort indifférentes : & le dixieme, parce qu'il est très-long, très-abstrait, & de la plus parfaite inutilité.





PRÉFACE.

LE Nil qui chaque année étend ſes eaux ſur toute l'Egypte, enleve les bornes des terres de cette contrée ; de maniere que les propriétaires ſont ſouvent obligés, lorſque ce fleuve eſt rentré dans ſon lit, de rechercher le terrain qu'ils poſſédoient avant l'inondation. Cette néceſſité fit inventer aux premiers Egyptiens, les moyens de meſurer l'étendue que peut avoir un certain eſpace, & ils donnerent à cet art le nom de *Géométrie*, qui en notre langue ſignifie *Meſure de la Terre*. Mais cette ſcience, qui dans ſon origine n'avoit eu que cet objet aſſez ſimple, ſortit bientôt du limon du Nil où elle avoit pris naiſſance ; & devint, pour me ſervir de l'expreſſion de Platon, l'une des ailes avec leſquelles l'homme s'éleva juſqu'à ces globes immenſes qui roulent ſur ſa tête. Alors, les machines furent inventées ; les édifices les plus hardis furent élevés ; les périodes

des aſtres furent déterminées; les courſes, les diſtances, les grandeurs des planetes, furent meſurées. Enfin, on conſtruiſit les vaiſſeaux, & la mer ne fut plus une barriere entre les Nations les plus éloignées.

On a donné pluſieurs Traités d'une ſcience dont on a retiré de ſi grands avantages, & qui en procure tous les jours de nouveaux. Mais, la plus grande partie de ces ouvrages n'a pas toute la perfection que l'on pourroit ſouhaiter. Les uns, trop ſecs & trop obſcurs, ſont la cauſe que l'on ſe dégoûte de la Géométrie avant que de la connoître : les autres, au contraire, trop dénués du ſtyle qui eſt propre & particulier à cette ſcience, n'ont ni l'ordre, ni le génie qui lui convient. Ainſi, loin de donner à l'eſprit l'étendue & la juſteſſe, qui ſont les principaux fruits que l'on doit recueillir de ce genre d'étude, ils font penſer que la Géométrie eſt auſſi problématique que la Phyſique. Et comme ces deux ſciences ne ſont pas également ſéduiſantes, on va quelquefois juſqu'à accuſer la premiere de manquer de ſens commun*;

* *Voyez* le nº 11.

elle, qui eſt le chef-d'œuvre du bon ſens.

L'abrégé des Elémens d'Euclide du P. Dechalles, n'a point le premier de ces défauts. Ce ſavant Mathématicien, en y ſimplifiant les démonſtrations, met la Géométrie à la portée des perſonnes qui veulent s'inſtruire de cette ſcience; & en joignant des uſages à pluſieurs propoſitions, il prévient le dégoût que l'ignorance de l'utilité de ces mêmes propoſitions pourroit cauſer. Mais, comme il étoit trop Géometre pour prévoir que l'on recevroit un jour des preuves, ou ſimplement phyſiques, ou totalement arithmétiques, pour des démonſtrations géométriques, il n'a pas toujours été attentif à ne démontrer qu'en rigueur: & par-là, il n'eſt d'aucun ſecours contre ces démonſtrations vicieuſes qui ſont devenues ſi communes, qu'il eſt bien rare que ceux qui n'étudient la Géométrie que dans les auteurs modernes, deviennent jamais Géometres.

C'eſt le deſir de remédier à ce dernier défaut qui m'a fait entreprendre de démon-er de nouveau ces Elémens; ſans m'aſſu-

jettir à ſuivre, ni le P. Dechalles, ni M. Ozanam, ni aucun autre Auteur. Je me ſuis ſeulement propoſé deux objets dans mon travail, dont le premier a été de ne donner que des démonſtrations qui euſſent toute la rigueur de celles des Anciens ; & le ſecond, de me mettre à la portée de toutes les perſonnes qui, par goût ou par état, veulent s'appliquer à ce genre d'étude. Si quelques perſonnes trouvent que j'aie employé plus de mots que beaucoup d'autres Auteurs, pour démontrer quelques propoſitions, je ſupplie ces perſonnes de ne meſurer mes démonſtrations que par la durée du temps qu'elles emploieront à les comprendre; de faire attention que j'ai toujours démontré en rigueur ; & que ſi elles m'entendent ſans peine, & ſi je n'ai laiſſé aucun voile ſur les vérités que je voulois découvrir, j'ai fait ce que je devois faire.

A l'égard d'Euclide, de qui ces Elémens portent le nom, il étoit de la ville de Mégare, vivoit ſous le premier des Ptolomées, environ 400 ans avant J. C.; & l'on peut dire qu'il n'y a eu de Géometres depuis lui que ceux qu'il a formés.



NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

Les Mathématiciens nomment *Théorêmes*, les propoſitions qui ne font qu'expoſer une vérité : *Problêmes*, celles qui propoſent quelque choſe à faire : *Corollaires*, celles qui ſont des conſéquences d'autres propoſitions : & enfin *Scholies*, celles qui ne ſont que des remarques.

Ils nomment *hypotheſe*, les conditions auxquelles ils diſent qu'une choſe doit être : & *conſéquence*, ce qui ſuit de l'hypotheſe, & qu'il faut démontrer.

Par exemple, dans cette propoſition : *ſi un triangle eſt équilatéral, ſes trois angles ſont égaux ;* cette partie, *ſi un triangle eſt équilatéral*, eſt l'*hypotheſe ;* & celle-ci, *ſes trois angles ſont égaux*, eſt la *conſéquence*, qu'il faut démontrer.

C'eſt l'uſage de terminer toujours la démonſtration d'une propoſition,

par la répétition de l'hypotheſe & de la conſéquence. Mais, pour abréger, on déſigne l'un & l'autre par ces quatre lettres, C. Q. F. D., s'il s'agit d'un théorême; & par ces quatre lettres, C. Q. F. F., s'il eſt queſtion d'un problême. Les quatre premieres ſignifient, *ce qu'il falloit démontrer;* & les quatre autres, *ce qu'il falloit faire.*

C'eſt auſſi par le même motif de briéveté que nous nous ſommes ſervis de quelques ſignes, dont voici l'explication.

(n) Signifie, *par le numéro qui eſt chiffré à la marge.*

[C] Signifie, *par la conſtruction.*

[D] Signifie, *par ce qui vient d'être démontré.*

[H] Signifie, *par l'hypotheſe.*

[S] Signifie, *par la ſuppoſition.*

*L'aſtérique * avertit que la figure eſt indiquée à la marge.*

APPROBATION.

J'Ai lu, par ordre de Mgr le Garde des Sceaux, *Les Elémens d'Euclide du P. Déchalles, & de M. Ozanam, de l'Académie royale des Sciences.* Cette nouvelle édition, corrigée, & augmentée des Proportions arithmétiques, des Proportions géométriques, &c. nous a paru remplir les vues de tous ceux qui veulent s'adonner à l'étude de la Géométrie, & qui désirent de cette science un Traité complet, court & facile. A Paris, ce 5 Août 1775. MONTUCLA.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE : A nos Amés & féaux Conseillers, les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenants civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra : SALUT. Notre amé le sieur JOMBERT, fils ainé, notre Libraire à Paris, Nous a fait exposer qu'il desireroit faire imprimer & donner au Public, *Les Œuvres de Mathématiques de M. Ozanam, & de M. Clermont*, s'il Nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilege pour ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes, de faire imprimer lesdits Ouvrages autant de fois que bon lui semblera, & de les faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le temps de six années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes. Faisons défenses à tous Imprimeurs, Libraires, & autres personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance ; comme aussi d'imprimer, ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire lesdits Ouvrages, ni d'en faire aucun extrait, sous quelque prétexte que ce puisse être, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenants,

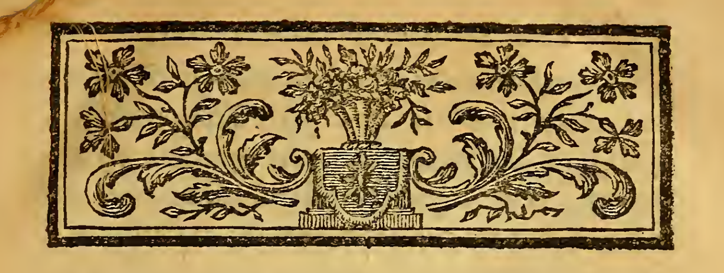
dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Expoſant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts. A la charge que ces préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le regiſtre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impreſſion dudit ouvrage ſera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément aux Réglements de la Librairie, & notamment à celui du dix Avril 1725, à peine de déchéance du préſent Privilege; qu'avant de les expoſer en vente, le manuſcrit qui aura ſervi de copie à l'impreſſion deſdits Ouvrages, ſera remis dans le même état où l'approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, Garde des Sceaux de France le ſieur HUE DE MIROMENIL; qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher féal Chevalier, Chancelier de France le ſieur DE MAUPEOU, & un dans celle dudit ſieur HUE DE MIROMENIL; le tout à peine de nullité des Préſentes: du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Expoſant & ſes ayant cauſe, pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie des Préſentes, qui ſera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, ſoit tenue pour dûement ſignifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conſeillers-Secrétaires, foi ſoit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent ſur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant clameur de haro, charte normande & lettres à ce contraires: car tel eſt notre plaiſir. DONNÉ à Paris le trentieme jour du mois d'Août, l'an de grace mil ſept cent ſoixante-quinze, & de notre regne le deuxieme. Par le Roi en ſon Conſeil.

Signé, LEBEGUE.

Regiſtré ſur le Regiſtre XX de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, n° 167, *fol.* 6, *conformément au Réglement de* 1723. *A Paris, ce* 4 *Septembre* 1775.

Signé, SAILLANT, Syndic.

LES



LES ÉLÉMENS D'EUCLIDE.

LIVRE PREMIER.

EUCLIDE commence ce Livre par définir les termes les plus ordinaires de la Géométrie, & par poser les principes sur lesquels il doit fonder toutes ses démonstrations. Il considere ensuite les triangles; détermine les conditions auxquelles on doit conclure l'égalité de leurs angles, de leurs côtés & de leurs surfaces; & enseigne la maniere de se servir de ces figures, pour résoudre les problêmes les plus simples de la Géométrie. Il passe aux lignes paralleles; examine à quelles marques on peut connoître si des lignes le sont; considere les propriétés de ces lignes; en déduit une des

plus considérables des triangles ; & naturellement conduit aux parallélogrammes, qui sont des figures formées par ces mêmes lignes, il en expose aussi plusieurs propriétés ; démontre quelques-uns des cas auxquels ils sont égaux, & donne des regles pour transformer en parallélogramme une figure rectiligne quelconque. Il termine enfin ce Livre par la fameuse proposition du quarré de l'hypoténuse, l'une des plus belles & des plus utiles de la Géométrie ; & qui causa, dit-on, tant de plaisir à Pythagore, lorsqu'il l'eût trouvée, qu'il offrit aux Muses un sacrifice de cent bœufs, pour les remercier de la faveur qu'elles lui avoient faite.

DÉFINITIONS.

Nº 1. LA *Géométrie* est une science qui considere l'*étendue*.

2. Ce qui est étendu peut ne l'être qu'en un sens, c'est-à-dire n'avoir que de la *longueur*. Il peut l'être en deux sens, c'est-à-dire avoir en même temps de la *longueur* & de la *largeur* †. Enfin il peut l'être en trois sens, c'est-à-dire avoir en

† La largeur se nomme aussi la *hauteur*.

même temps de la *longueur*, de la *largeur* & de l'*épaisseur* †.

Par exemple, la distance d'un lieu à un autre n'est que longue : *ce que nous voyons du plancher d'une chambre est en même temps* long & large : *un mur est en même temps* long, large & épais.

Ainsi il y a trois genres d'étendues.

3. La longueur, la largeur & l'épaisseur se nomment chacune *Dimension*.

On entend ici par le terme de Dimension, *la distance de l'un des côtés d'une étendue au côté opposé. Ainsi, la grandeur d'une étendue dépend de la grandeur de chacune de ses dimensions.*

4. On nomme *Point* ce qui, considéré dans l'étendue, n'a aucunes parties.

Lorsque les Géometres veulent indiquer un certain endroit d'une étendue, ils donnent à cet endroit le nom de Point géométrique, *ou seulement de* Point. *Or cet endroit, c'est-à-dire ce Point, n'a aucunes parties. Car, s'il pouvoit en avoir, chacune indiqueroit un endroit différent de celui que l'on voudroit indiquer. Ainsi, il ne détermineroit que d'une façon vague l'endroit dont il s'agiroit. Il faudroit donc alors, pour déterminer rigoureusement cet endroit, l'indi-*

† L'épaisseur se nomme aussi la *profondeur*.

quer par telle ou telle partie d'un tel Point.

Mais cette telle ou telle partie auroit elle-même des parties, ou elle n'en auroit pas. Si elle n'en avoit pas, ce seroit elle qui seroit alors ce que l'on doit entendre par un Point géométrique ; puisque ce seroit alors elle qui détermineroit rigoureusement l'endroit dont il s'agiroit, & que le Point par lequel on l'auroit indiqué d'abord, ne l'auroit déterminé que confusément. Par conséquent ce dernier Point ne seroit plus ce que l'on entend par un Point géométrique.

Si au contraire cette telle ou telle partie pouvoit avoir elle-même des parties, on feroit sur elle le même raisonnement que l'on vient de faire sur un Point auquel on auroit pu en supposer ; & ainsi de suite à l'infini. Donc, le Point géométrique est rigoureusement indivisible ; & par conséquent il ne peut avoir aucunes parties.

*Mais, puisque le Point géométrique ne peut avoir aucunes parties, on le conçoit, sans que l'on puisse cependant s'en former aucune image ; ni par conséquent le figurer. Ainsi, l'on est forcé de le représenter par le Point physique *, que l'on considere alors*

* En physique, on nomme *Point*, un corps ou une surface, dont chaque dimension est *infiniment petite* ¶.

¶ Ces expressions, *infiniment petit*, *infiniment grand*, *&c.* ne signifient autre chose que *le plus petit* ou *le plus grand* que l'on puisse s'imaginer.

comme s'il étoit réellement le Point géométrique ; quoique, quelque petit que l'on puiſſe ſuppoſer un Point phyſique, il ſoit toujours effectivement étendu, au moins en deux ſens.

5. On nomme *Ligne*, ce qui n'eſt étendu qu'en un ſens.

La diſtance d'un lieu à un autre, ou, ſi l'on veut, celle d'un point à un autre, donne une idée très-exacte de ce que les Géometres entendent par une Ligne. *Car la diſtance d'un lieu à un autre n'eſt certainement étendue qu'en un ſens ; puiſqu'elle n'eſt autre choſe que la longueur de l'eſpace qui eſt compris entre ces deux lieux, & qu'elle eſt abſolument indépendante des deux autres ſens en leſquels ce même eſpace eſt étendu. Or cette longueur eſt préciſément ce que l'on doit entendre par une Ligne.*

De plus, puiſqu'une Ligne n'eſt étendue qu'en un ſens, elle n'a ni largeur ni épaiſſeur ; car, ſi elle en avoit, elle ſeroit alors étendue en deux ſens, ou en trois ſens, & par conſéquent elle ne ſeroit plus une Ligne.

Mais, puiſque la Ligne géométrique n'eſt qu'une longueur, on la conçoit, ſans que l'on puiſſe cependant s'en former aucune image ; ni par conſéquent la figurer. Ainſi, l'on eſt auſſi forcé de la repréſenter par la

ligne physique, que l'on considere alors comme n'ayant réellement aucune largeur; quoique, quelque étroite que l'on puisse supposer une Ligne physique, elle soit toujours effectivement étendue, au moins en deux sens.

COROLLAIRE.

6. *Il suit de cette définition, que* les extrémités d'une ligne sont des points.

Démonstration. *Les extrémités d'une ligne ne sont étendues, ni en deux sens, ni*
N. 5. *en trois sens; puisque* (n) *les lignes ne le sont qu'en un seul. Elles ne sont point non plus étendues en un sens; puisque si elles*
N. 5. *l'étoient, elles seroient des lignes* (n). *Or*
Fig. 1. *les extrémités A & B* d'une ligne AB, ne sont point des lignes; puisque si elles étoient des lignes, par exemple AC & BD, elles auroient des extrémités A & C, B & D; & par conséquent elles ne seroient point celles de la ligne AB, mais ce seroient leurs extrémités A & B qui le seroient. Ainsi, les extrémités d'une ligne ne sont étendues en aucun sens: donc elles n'ont aucunes*
N. 4. *parties; & par conséquent* (n) *elles sont des points.*

Donc, C. Q. F. D.

7. On nomme *Ligne droite* †, celle qui va directement d'un point à un autre.

La ligne AB *, *qui en allant du point A au point B ne fait aucun détour, est une* ligne droite. Fig. 1.

8. On nomme *Ligne courbe*, celle qui ne va directement d'un point à un autre en aucune de ses parties.

La ligne CD *, *qui en allant du point C au point D se détourne continuellement de la ligne droite, est une* ligne courbe. Fig. 2.

9. On nomme *Surface* ¶, ce qui n'est étendu qu'en deux sens.

Rien ne peut aussi donner une idée de la surface, qui soit plus simple & plus exacte, que de la définir, ce que l'on voit d'un corps. *Car ce que l'on voit d'un corps n'est certainement étendu qu'en deux sens, & n'a par conséquent que de la longueur & de la largeur.*

COROLLAIRE.

10. *Il suit de cette définition, que* les extrémités d'une surface sont des lignes.

Démonst. *Les extrémités d'une surface ne sont point étendues en trois sens; puis-*

† Euclide ne considere que les lignes droites.

¶ La surface se nomme aussi *superficie* & *aire*.

N. 9. *que* (n) *les ſurfaces ne le ſont qu'en deux. Elles ne ſont point non plus étendues en deux ſens ; puiſque ſi elles l'étoient, elles*
N. 9. *ſeroient des ſurfaces* (n). *Or les extrémités*
Fig. 3. *AD*, BC, &c. d'une ſurface AC, ne ſont point des ſurfaces ; puiſque ſi elles étoient des ſurfaces, par exemple AF, GC, &c. elles auroient des extrémites AD, EF, BC, GH, &c. Par conſéquent elles ne ſeroient point celles de la ſurface AC, mais ce ſeroient leurs extrémités AD, BC, &c. qui le ſeroient. Ainſi les extrémités d'une ſurface ne ſont étendues ni en trois ſens, ni en deux ſens. Cependant elles ſont étendues. Car, puiſque les ſurfaces le ſont en deux ſens*
N. 9. (n), *il faut néceſſairement que ce qui termine l'un de ces deux ſens ſoit étendu en l'autre. Donc elles ne ſont étendues qu'en un ſens ;*
N. 5. *& par conſéquent* (n) *elles ſont dès lignes. Donc, C. Q. F. D.*

SCHOLIE.

11. *Preſque tous les nouveaux Elémens de Géométrie font conſidérer la ligne comme compoſée de points mis les uns aux bouts des autres ; la ſurface, comme compoſée de lignes couchées les unes à côté des autres ; & le corps, comme compoſé de ſurfaces poſées les unes ſur les autres. Mais il faut obſerver que les Auteurs de ces Elémens ſont preſque*

*tous des Physiciens ; & qu'en cette qualité ils considerent la ligne comme ayant une largeur infiniment petite, & la surface, comme ayant une épaisseur infiniment mince. Ainsi, dans leur hypothese, la ligne est réellement une surface infiniment étroite, & la surface un corps infiniment mince. Par conséquent, il n'y a aucune absurdité dans la maniere dont on vient de dire qu'ils font considérer & la surface & le corps. Ils n'avanceroient non plus rien de contradictoire, en faisant considérer la ligne comme composée de points mis les uns aux bouts des autres, si par ces points ils entendoient des points physiques**. *Mais c'est précisément ce qu'ils ne font pas, puisqu'ils conservent au point la même définition que les Géometres lui donnent. Or, y a-t-il rien de plus absurde que de prétendre qu'en mettant les unes aux bouts des autres des choses qui n'ont absolument aucune étendue, il en résulte une longueur ?*

Cependant un grand nombre de leurs démonstrations supposent cette absurdité ; & comme elles ne sont même la plupart que des démonstrations purement physiques, elles sont très-susceptibles d'être contredites. Aussi plusieurs Auteurs célebres, qui dans leurs

* *Voyez* la premiere note du n° 4.

écrits ont parlé des différents degrés de certitude des connoiſſances humaines, & qui ne connoiſſent la Géométrie que par ce qu'ils en ont lu dans les nouveaux Elémens, ſoutiennent que non-ſeulement les vérités géométriques ne ſont que des vérités de convention; mais de plus, que la Géométrie elle-même eſt une ſcience pleine d'abſurdités, étant toute fondée ſur la ſuppoſition que l'étendue réſulte de ce qui n'en a point; c'eſt-à-dire du point mathématique, qui n'a ni longueur, ni largeur, ni épaiſſeur. Que nous reſteroit-il donc de certain, ſi, égarés par des définitions trop peu exactes, on parvenoit à nous faire auſſi douter même des vérités géométriques?

Il réſulte encore un autre inconvénient de l'abus qui a introduit la Phyſique dans la Géométrie: c'eſt que les perſonnes qui n'étudient cette derniere ſcience que dans les nouveaux Elémens, perdent les principaux avantages qu'ils pourroient retirer de cette étude, qui ſont ceux de ſe former le raiſonnement, & de ſe rendre l'eſprit juſte.

12. On nomme *Surface plane* †, celle que tous les points d'une ligne droite toucheroient au même inſtant, en quelque

† La ſurface plane ſe nomme auſſi un *plan*; Euclide ne conſidere que ces ſurfaces.

ſens que l'on poſât cette ligne ſur cette ſurface.

Lorſque l'on veut s'aſſurer qu'une ſurface eſt plane, on lui applique une regle en différents ſens; & l'on examine à chaque poſition ſi cette regle la touche par-tout. Les ouvriers ne s'y prennent point autrement pour rectifier leurs ouvrages.

13. On nomme *Surface courbe*, celle que tous les points d'une ligne droite ne toucheroient point au même inſtant, ſi l'on poſoit cette ligne ſur cette ſurface en un certain ſens.

14. On nomme *Angle* ¶, l'ouverture de deux lignes qui ont un point commun.

L'ouverture des lignes BA * *& BC, qui ont le point B commun, eſt un angle.* Fig. 4.

15. On nomme *Côtés* d'un angle, les deux lignes qui le forment.

Les lignes BA * *& BC, ſont les* côtés *de l'angle B.* Fig. 4.

16. On nomme *Sommet* d'un angle, le point qui eſt commun à ſes côtés.

Le point B *, *qui eſt commun aux lignes BA & BC, eſt le* ſommet *de l'angle B.* Fig. 4.

¶ L'angle que l'on définit ici ſe nomme *angle-plan*, pour le diſtinguer d'un angle d'un autre genre, dont il n'eſt parlé qu'au onzieme Livre.

SCHOLIE I.

17. *Lorsque plusieurs angles ont le même sommet, on les indique par leurs côtés; parce que la lettre qui est à leur sommet n'en désigneroit aucun en particulier. Ainsi, pour indiquer l'angle qui est à la droite de la*
Fig. 5. *ligne AB**, on dit*, l'angle formé par les lignes AB & BC; *& pour indiquer celui qui est à la gauche de la même ligne, on dit*, l'angle formé par les lignes AB & BD. *Mais on abrege ordinairement cette expression, en disant seulement* l'angle ABC *pour indiquer le premier, &* l'angle ABD *pour indiquer le second. Remarquez que lorsqu'on se sert de cette expression abrégée, la seconde lettre est toujours celle du sommet de l'angle dont il s'agit.*

SCHOLIE II.

Fig. 4. 18. *Si l'on fait tourner la ligne BC* autour du point B, de maniere que ce point soit toujours l'extrémité commune des lignes BA & BC, plus le point C s'éloignera du point A, plus l'ouverture de ces lignes sera grande; & plus il s'en approchera, moins elle le sera. Ainsi, la grandeur de cette ouverture dépend de la position respective des*
N. 14. *lignes qui la forment. Mais* (n) *cette ou-*

verture est un angle dont (n) *ces lignes sont* N. 15.
les côtés. Donc la grandeur d'un angle dépend de la position respective de ses côtés ; & par conséquent, quelque augmentation ou diminution que l'on fasse aux côtés d'un angle, on n'augmente ni ne diminue cet angle ; puisque ni cette augmentation, ni cette diminution, ne change la position respective de ses côtés.

19. On nomme réciproquement *Lignes perpendiculaires*, deux lignes qui se rencontrent de maniere que l'une forme avec l'autre, prolongée s'il est nécessaire, deux angles égaux.

La ligne AB, qui forme avec la ligne* Fig. 6.
DC deux angles égaux ABC & ABD, est perpendiculaire *à cette ligne DC.*

20. On nomme réciproquement *Lignes obliques*, deux lignes qui se rencontrent de maniere que l'une forme avec l'autre, prolongée s'il est néceſſaire, deux angles inégaux.

La ligne AB, qui forme avec la ligne* Fig. 5.
DC deux angles inégaux ABC & ABD, est oblique *à cette ligne DC.*

21. On nomme *Angle droit*, celui dont l'un des côtés est perpendiculaire à l'autre.

L'angle A est droit.* Fig. 7.

22. On nomme *Angle obtus*, celui qui eſt plus grand, c'eſt-à-dire plus ouvert, qu'un angle droit.

Fig. 8. *L'Angle B* eſt* obtus.

23. On nomme *Angle aigu*, celui qui eſt plus petit, c'eſt-à-dire moins ouvert, qu'un angle droit.

Fig. 9. *L'angle C* eſt* aigu.

24. On nomme *Terme*, l'extrémité d'une étendue.

25. On nomme *Figure*, une étendue qui eſt terminée de tous les côtés.

26. On nomme *Figures égales*, celles qui contiennent des eſpaces égaux.

SCHOLIE.

27. *Il ne faut point confondre les figures* égales *avec les figures* ſemblables. *Par exemple, une figure de trois côtés, qui contient autant d'eſpace qu'une de quatre, eſt* égale *à cette figure de quatre côtés, & ne lui eſt point* ſemblable. *Un petit cercle, au contraire, eſt ſemblable à un grand, & ne lui eſt point* égal. *On verra au ſixieme Livre les conditions que des figures doivent avoir pour être* ſemblables.

28. On nomme *Cercle*, une figure plane

qui eſt terminée par une ſeule ligne, dont tous les points ſont également éloignés d'un certain point de cette figure.

La figure X eſt un* cercle. Fig. 10.

29. On nomme *Circonférence* † d'un cercle, la ligne qui le termine.

La ligne ABDE eſt la* circonférence *du cercle X.* Fig. 10.

30. On nomme *Arc* de cercle, une partie quelconque de la circonférence d'un cercle.

La partie, par exemple AB, de la circonférence du cercle X, eſt un* arc *de cercle.* Fig. 10.

31. On nomme *Degré*, un arc de cercle qui eſt la 360e partie de la circonférence d'un cercle; *Minute*, un arc de cercle qui eſt la 60e partie d'un degré; *Seconde*, un arc de cercle qui eſt la 60e partie d'une minute; *Tierce*, un arc de cercle qui eſt la 60e partie d'une ſeconde; & ainſi de ſuite.

32. On nomme *Centre* d'un cercle, le point qui eſt également éloigné de tous les points de la circonférence de ce cercle.

Le point C eſt le* centre *du cercle X.* Fig. 10.

† Le nom de *circonférence* ſe donne non-ſeulement à la ligne qui termine un cercle, mais auſſi à toute ligne qui termine une ſurface quelconque. Une circonférence ſe nomme auſſi un *périmetre*, une *périférie*, & un *circuit*.

33. On nomme *Diametre* d'un cercle, une ligne droite quelconque qui passe par le centre de ce cercle, & est terminée de part & d'autre par sa circonférence.

Fig. 10. *La ligne AD* * *est un* diametre *du cercle X.*

34. On nomme *Rayon* d'un cercle, une ligne droite quelconque qui est tirée du centre de ce cercle à sa circonférence.

Fig. 10. *La ligne CB* * *est un* rayon *du cercle X.*

COROLLAIRE.

35. *Il suit des* Nos 28, 32, 33 & 34, *Premiérement, que* tous les diametres d'un même cercle sont égaux; *secondement, que* le rayon d'un cercle est la moitié de son diametre; *troisiémement enfin, que* tous les rayons d'un même cercle sont égaux.

36. On nomme *Demi-cercle*, une figure plane qui est terminée par la moitié de la circonférence d'un cercle, & par son diametre.

Fig. 11. *La figure Y* * *est un* demi-cercle.

SCHOLIE.

37. *On peut toujours considérer un angle*
Fig. 12. *quelconque BAC*, comme ayant été formé par une ligne droite AC, qui, après avoir*

été posée sur une autre AB, s'en seroit écartée vers C, en tournant autour du point fixe A, qui est le sommet de cet angle; & en décrivant avec ses autres points E, G, C, &c. des arcs de cercle DE, FG, BC, &c. qui ont ce même point A pour centre, & sont compris entre les côtés AB & AC de ce même angle.

Mais si une ligne droite AC, ayant l'une quelconque A de ses extrémités fixe, fait une révolution entiere autour de cette extrémité, chacun de ses autres points E, G, C, &c. décrit une circonférence de cercle : si elle ne fait que la moitié d'une révolution, chacun de ses autres points ne décrit que la moitié d'une circonférence : si elle ne fait que le tiers d'une révolution, chacun de ses autres points ne décrit que le tiers d'une circonférence ; & ainsi de suite.

Donc, lorsque des arcs de cercle DE, FG, BC, &c. ont pour centre le sommet A d'un angle quelconque BAC, & sont compris entre les côtés AB & AC de ce même angle, le premier DE est même partie de la circonférence du cercle dont AD est le rayon, que le second FG l'est de la circonférence du cercle dont AF est le rayon, que le troisieme BC l'est de la circonférence du cercle dont AB est le rayon; & ainsi de suite. Par conséquent tous ces arcs sont

ſemblables ; *c'eſt-à-dire, ſont chacun d'un même nombre de degrés.*

Ainſi, ſi l'un quelconque des arcs l*E*, n*G*, *PC*, *&c. d'un angle PAC* †, *eſt d'autant de degrés que l'un quelconque des arcs D*k, *F*m, *BO*, *&c. d'un autre angle BAO ; le chemin que le point C eſt ſuppoſé avoir fait pour s'avancer de P en C, eſt égal à celui que le point O eſt auſſi ſuppoſé avoir fait pour s'avancer de B en O. Donc, la ligne AC s'eſt alors autant écartée de la ligne AP en tournant autour du point fixe A, que la ligne AO s'eſt écartée de la ligne AB en tournant autour du même point. Par conſéquent l'angle PAC que forment les deux premieres, eſt égal à l'angle BAO qui eſt formé par les deux dernieres.*

Pareillement, ſi l'un quelconque des arcs k*E*, m*G*, *OC*, *&c. d'un angle OAC, eſt de deux fois autant de degrés que l'un quelconque des ars D*k, *F* m, *BO*, *&c. d'un autre angle BAO, le premier angle eſt double du ſecond : ſi l'un quelconque des arcs DE FG, BC, &c. d'un angle BAC, eſt de trois fois autant de degrés que l'un quelconque des arcs D*k, *F* m, *BO*, *&c. d'un au-*

† On nomme *arcs d'un angle*, des arcs qui ont le ſommet de cet angle pour centre, & ſont compris entre les côtés de ce même angle.

tre angle BAO ; le premier angle eſt triple du ſecond ; & ainſi de ſuite.

Donc, la meſure naturelle d'un angle, eſt un arc de cercle quelconque compris entre les côtés de cet angle, & décrit de ſon ſommet pris pour centre; & le nombre des degrés de cet arc, eſt la valeur de ce même angle.

Par exemple, la meſure *de l'angle BAC, eſt celui des arcs DE, FG, &c. que l'on veut ; & le nombre des degrés que cet arc contient, eſt la* valeur *de cet angle.*

COROLLAIRE.

38. *Il ſuit de cette ſcholie, qu'*un angle droit eſt de 90 degrés.

Démonſt. *Lorſqu'un angle eſt droit, l'arc de cercle qui eſt décrit de ſon ſommet, & compris entre ſes côtés, eſt le quart de la circonférence d'un cercle. Or* (n) *le quart* N. 31.
de la circonférence d'un cercle eſt de 90 degrés. Donc un angle droit eſt de 90 degrés.

39. On nomme *Complément* d'un angle, la différence de cet angle à 90 degrés ; & *Supplément* d'un angle, la différence de cet angle à 180 degrés.

40. On nomme *Figure rectiligne*, celle qui n'eſt terminée que par des lignes droites,

On tire la dénomination des figures, ou du nombre de leurs côtés, ou de celui de leurs angles. Or, lorſque l'on tire la dénomination d'une figure du nombre de ſes côtés, on nomme:

41. *Trilatere* ou *Triligne*, une figure qui a trois côtés; *Quadrilatere* ou *Quadriligne*, celle qui en a quatre; *Figure de vingt côtés*, celle qui en a vingt; *de cent côtés*, celle qui en a cent; & en général *Multilatere*, celle qui en a pluſieurs.

Et lorſque l'on tire la dénomination d'une figure du nombre de ſes angles, on nomme:

Trigone ou *Triangle*, une figure qui a trois angles; *Tétragone*, celle qui en a quatre; *Pentagone*, celle qui en a cinq; *Exagone*, celle qui en a ſix; *Eptagone*, celle qui en a ſept; *Octogone*, celle qui en a huit; *Ennéagone*, celle qui en a neuf; *Décagone*, celle qui en a dix; *Endécagone*, celle qui en a onze; *Dodécagone*, celle qui en a douze; *Pentédécagone*, celle qui en a quinze; & en général *Polygone*, celle qui en a pluſieurs.

On tire auſſi la dénomination des triangles, ou de leurs côtés, ou de leurs angles. Or, lorſque l'on tire de ſes côtés la dénomination d'un triangle, on nomme:

42. *Triangle équilatéral*, celui dont tous les côtés ſont égaux.

Le triangle A * *eſt* équilatéral. Fig. 13.

43. *Triangle iſoſcele*, celui qui a deux côtés égaux.

Le triangle B * *eſt* iſoſcele. Fig. 14.

44. *Triangle ſcalêne*, celui dont tous les côtés ſont inégaux.

Le triangle C * *eſt* ſcalêne. Fig. 15.

Et lorſque l'on tire de ſes angles la dénomination d'un triangle, on nomme :

45. *Triangle rectangle*, celui qui a un angle droit.

Le triangle A * *eſt* rectangle. Fig. 16.

46. *Triangle obtuſangle*, celui qui a un angle obtus.

Le triangle B * *eſt* obtuſangle. Fig. 17.

47. *Triangle acutangle*, celui dont tous les angles ſont aigus.

Le triangle C * *eſt* acutangle. Fig. 18.

48. On nomme *Hypoténuſe*, le côté d'un triangle rectangle, qui eſt oppoſé à l'angle droit de ce triangle.

49. On nomme *Angle extérieur* d'un triangle, un angle formé par le prolongement de l'un des côtés de ce même triangle.

Fig. 19. *L'angle ABC * est l'angle* extérieur *du triangle DAB.*

A l'égard de la dénomination des quadrilateres, elle dépend tout à-la-fois & de leurs côtés & de leurs angles. Ainsi l'on nomme :

50. *Quarré*, un quadrilatere dont tous les côtés sont égaux, & dont tous les angles sont droits.

Fig. 20. *La figure A * est un* quarré.

51. *Quarré long*, un quadrilatere dont les seuls côtés opposés sont égaux, & dont tous les angles sont droits.

Fig. 21. *La figure B * est un* quarré long.

52. *Rhombe* ou *Lozange*, un quadrilatere dont tous les côtés sont égaux, mais dont les angles ne sont pas droits.

Fig. 22. *La figure C * est un* rhombe.

53. *Rhomboïde*, un quadrilatere dont les seuls côtés opposés sont égaux, & dont les angles ne sont pas droits.

Fig. 23. *La figure D * est un* rhomboïde.

54. On nomme *Trapeze*, tout quadrilatere différent des quatre que l'on vient de définir.

55. On nomme *Lignes paralleles*, celles dont tous les points des unes sont égale-

ment éloignés de tous les points correſpondans des autres.

*Les lignes AB * & CD ſont* paralleles. Fig. 14.

COROLLAIRE.

56. *Il ſuit de cette définition, que* des lignes paralleles ne ſe rencontrent point.

57. On nomme *Parallélogramme*, toute figure plane dont les côtés oppoſés ſont paralleles.

SCHOLIE.

58. *Il eſt démontré au* N° 127, *que les côtés oppoſés du* quarré, *du* quarré long, *du* rhombe *& du* rhomboïde, *ſont paralleles. Ainſi, ces quatre figures ſont* parallélogrammes †; *& comme les deux premieres ont tous leurs angles droits, on les appelle des* Parallélogrammes rectangles, *ou ſeulement des* Rectangles.

Mais il faut remarquer que, quoique toute figure plane dont les côtés oppoſés ſont paralleles ſoit un parallélogramme, cependant on ne donne cette dénomination qu'aux quatre figures précédentes.

† Ces noms, *quarré*, *parallélogramme* & *rectangle*, ſont ſubſtantifs & adjectifs. Ainſi, être parallélogramme, c'eſt avoir les côtés oppoſés paralleles; & être rectangle, c'eſt avoir des angles droits.

59. On nomme *Diagonale* d'un quadrilatere, une ligne droite tirée de l'un quelconque des angles de ce quadrilatere, à l'angle opposé de ce même quadrilatere.

Fig. 25. *La ligne AC* est la* diagonale *du quadrilatere DB.*

60. Enfin, on nomme *Complémens* d'un parallélogramme, deux parallélogrammes formés de part & d'autre de la diagonale du premier, par deux lignes paralleles à ses côtés, chacune à chacun, & qui ont un point commun entr'elles & cette même diagonale.

Fig. 25. *Les parallélogrammes DF* & FB sont les* complémens *du parallélogramme DB.*

DEMANDES.

On demande qu'il soit permis :

Premiérement, de tirer une ligne droite d'un point quelconque à quelque autre point que l'on veuille ; *& par conséquent*, de prolonger une ligne droite autant qu'on le veut.

Secondement, de décrire un cercle de quelque point que l'on veuille prendre pour centre, & avec quelque rayon que l'on veuille.

61. *Troisiémement* enfin, de prendre indifféremment l'une pour l'autre, deux quantités égales.

AXIOMES.

AXIOMES.

62. Les quantités qui ſont égales chacune à une même quantité, ſont égales entr'elles.

63. Les quantités égales étant ajoutées à des quantités égales, forment des ſommes égales.

64. Les quantités égales étant retranchées de quantités égales, laiſſent des reſtes égaux.

65. Les quantités égales étant ajoutées à des quantités inégales, forment des ſommes inégales.

66. Les quantités égales étant retranchées de quantités inégales, laiſſent des reſtes inégaux.

67. Les quantités qui ſont doubles, triples, quadruples, &c. de quantités égales, ſont égales.

68. Les quantités qui ſont les moitiés, les tiers, les quarts, &c. de quantités égales, ſont égales.

69. Deux lignes droites, ou deux figures planes, qui étant poſées l'une ſur l'autre ne ſe ſurpaſſent point, c'eſt-à-dire, ſe couvrent réciproquement, ſont égales.

COROLLAIRE.

70. *Il ſuit de cet axiome : Premiérement, que* ſi deux lignes droites égales ſont poſées l'une ſur l'autre, de maniere que l'une des extrémités de la premiere ſoit ſur l'une des extrémités de la ſeconde, l'autre extrémité de la premiere ſera ſur l'autre extrémité de la ſeconde.

71. *Secondement, que* ſi deux angles égaux ſont poſés l'un ſur l'autre, de maniere que le ſommet du premier étant ſur le ſommet du ſecond, l'un des côtés du premier ſoit ſur l'un des côtés du ſecond, l'autre côté du premier ſera ſur l'autre côté du ſecond.

72. Une quantité eſt égale à la ſomme de toutes ſes parties ; & par conſéquent, plus grande qu'aucune de ſes parties.

COROLLAIRE.

73. *Il ſuit de cet axiome, que* la ſomme des produits de toutes les parties d'une quantité, multipliées chacune par un même multiplicateur, eſt égale au produit de cette même quantité multipliée auſſi par ce même multiplicateur.

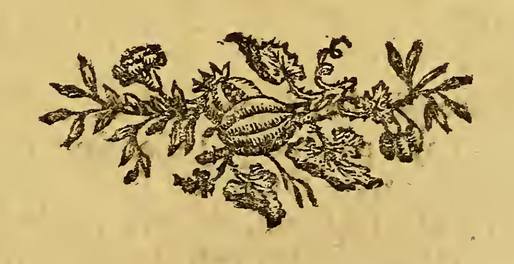
Par exemple, 7 *&* 5 *ſont toutes les par-*

ties de 12. *Or, si l'on multiplie* 7 *&* 5 *chacun, par exemple par* 4, *la somme des produits* 28 *&* 20, *sera égale au produit* 48 *de* 12 *multiplié aussi par* 4.

74. Deux lignes droites qui ont deux points communs, sont posées l'une sur l'autre, & ne font qu'une seule ligne droite.

COROLLAIRE.

75. *Il suit de cet axiome : Premiérement, que* deux lignes droites ne se rencontrent qu'en un point. *Secondement, que* deux lignes droites ne ferment point un espace.



PROPOSITION I.

PROBLÊME.

76. *Décrire ſur une ligne droite donnée, un triangle équilatéral.*

Fig. 26. Il faut décrire ſur la ligne droite AB* un triangle équilatéral.

Conſtruction. Avec la même ligne AB priſe pour rayon, décrivez du point A pris pour centre, un cercle DCB; & du point B pris pour centre, un autre cercle ACE. Du point C, commune ſection des circonférences de ces deux cercles, tirez aux points A & B les lignes droites CA & CB. Le triangle ACB que ces lignes formeront avec la ligne AB, ſera équilatéral.

Démonſt. Les lignes AB & AC ſont
N. 35. égales (n), puiſque [c] elles ſont rayons
N. 35. du même cercle DCB. Or (n), les lignes AB & BC ſont auſſi égales; puiſque [c] elles ſont rayons du même cercle ACE.
N. 62. Donc (n), les lignes AB, AC & BC
N. 42. ſont égales; & par conſéquent (n), le triangle ACB qu'elles forment, eſt équilatéral.

Donc, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

77. *Pour avoir le point C**, *il suffit de décrire avec la ligne AB prise pour rayon, & des points A & B pris pour centres, deux arcs qui se coupent réciproquement.* Fig. 26.

USAGE.

78. *On peut se servir du triangle équilatéral pour mesurer une distance inaccessible; par exemple, la largeur d'une riviere. Il faut pour cela décrire sur une planche un triangle équilatéral ABC**, *& s'en servir de cette maniere:* Fig. 27.

On pose horizontalement le triangle ABC, & l'on dirige son côté AC de maniere qu'il soit parallele au lit de la riviere. En regardant ensuite d'alignement au côté AB, on observe un point D au-delà de cette riviere; & d'alignement au côté AC, un autre point F éloigné de cinq à six toises du point A. On fait mettre un piquet en A, & un autre en F. On transporte ensuite le triangle ABC vers E; & l'on fait ensorte d'y trouver un point c *où l'on puisse poser ce même triangle, de maniere qu'en regardant d'alignement au côté* c a, *le piquet F empêche de voir le piquet A; & d'alignement au côté* c b, *on voye le même point précédent D. Lorsque l'on est*

parvenu à trouver ce point c, *les rayons visuels AD, A*c & c*D forment un triangle AD*c *qui est équilatéral, & dont on peut mesurer le côté A*c. *Or, on démontre par une conséquence du* n° 171, *que dans un triangle équilatéral, le quarré de la perpendiculaire est triple de celui de la moitié du côté. Ainsi, lorsque l'on connoît le côté A*c, *il est facile de trouver la valeur de la perpendiculaire DG; de laquelle si l'on ôte la distance HG du bord de la riviere à la ligne A*c, *le reste DH est la largeur demandée.*

PROPOSITION II.

PROBLÊME.

79. *Tirer d'un point donné, une ligne droite qui soit égale à une autre.*

Fig. 28. IL faut tirer du point C* une ligne droite qui soit égale à la ligne AB.

Conſt. Avec un rayon égal à la ligne AB, & du point C pris pour centre, décrivez un cercle FDE. Du même point C, tirez à un point quelconque D de la circonférence de ce cercle, une ligne droite CD. Cette ligne sera égale à la ligne AB.

Démonst. La ligne CD est [c] un rayon du cercle FDE ; & le rayon de ce cercle est égal [c] à la ligne AB. Donc (n) la ligne CD est égale à la ligne AB. N. 61.

Par conséquent, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

80. *Il suffit de prendre avec un compas la longueur de la ligne AB* ; de poser ensuite l'une des pointes de ce compas au point C ; de marquer avec l'autre un point D ; & de tirer de ce point C au point D une ligne droite CD.* Fig. 23.

On n'a fait décrire ici le cercle FDE, que parce que sa circonférence renferme tous les points qui peuvent résoudre ce problême.



PROPOSITION III.

PROBLÊME.

81. *Divifer une ligne droite en deux parties, dont l'une foit égale à une autre ligne droite plus petite que la premiere.*

Fig. 29. IL faut divifer la ligne droite AB * en deux parties, dont l'une foit égale à la ligne droite CD, qui eft plus petite que la ligne AB.

Conft. Avec un rayon égal à la ligne CD, & de l'une des extrémités de la ligne AB prife pour centre, (par exemple, du point A,) décrivez un arc de cercle EFG. Cet arc divifera la ligne AB au point F, comme il eft demandé.

Démonft. La partie AF de la ligne AB eft [c] un rayon de l'arc EFG. Or, ce rayon eft égal [c] à la ligne CD. Donc
N. 62. (n), la partie AF de la ligne AB eft égale à la ligne CD.

Par conféquent, C. Q. F. F.



PROPOSITION IV.

THÉORÊME.

82. *Si deux triangles ont un angle égal à un angle, & les côtés qui forment ce premier angle égaux à ceux qui forment ce second angle, chacun à chacun : ils auront aussi le troisieme côté égal au troisieme côté ; les autres angles égaux aux autres angles, chacun à chacun ; & la surface égale à la surface.*

SI dans les triangles ABC* & DEF l'angle A est égal à l'angle D, le côté AB au côté DE, & le côté AC au côté DF ; le côté BC sera égal au côté EF, l'angle B à l'angle E, l'angle C à l'angle F, & le triangle ABC au triangle DEF. Fig. 30.

Const. Posez par pensée le triangle ABC sur le triangle DEF, de maniere que le point A étant sur le point D, le côté AC soit sur le côté DF.

Démonst. Le côté AB tombera sur le côté DE (n), puisque [H] l'angle A est égal à l'angle D : & le point B tombera sur le point E (n), puisque [H] ces mêmes côtés AB & DE sont égaux. Or, le point C tombera sur le point F (n), puisque [H] le N. 71. N. 70. N. 70.

côté AC eſt égal au côté DF. Donc, le point A étant [c] ſur le point D, le point B tombe ſur le point E, & le point C ſur le point F. Ainſi, les triangles ABC & DEF ſe couvrent réciproquement; &
N. 69. par conſéquent (n), le côté BC eſt égal au côté EF, l'angle B à l'angle E, l'angle C à l'angle F, & le triangle ABC au triangle DEF.

Donc, C. Q. F. D.

USAGE.

83. *On peut ſe ſervir de cette propoſition, de la maniere ſuivante, pour meſurer une*
Fig. 32. *diſtance AB* * *qui n'eſt acceſſible que par ſes extrémités A & B.*

On choiſit dans la campagne un point C d'où l'on puiſſe voir les extrémités A & B de cette diſtance, & aller directement à chacune. On poſe un graphometre † *à ce point C. On dirige l'une des regles de cet inſtrument vers le point A, & l'autre vers le point B, afin d'avoir la grandeur de l'angle C formé par les deux rayons viſuels CA & CB. Enfin on meſure ces deux rayons viſuels.*

On ſe retire enſuite en un endroit commode. On y forme un angle c *égal à l'an-*

† Le *graphometre* eſt un inſtrument fait exprès pour meſurer les angles ſur le terrein.

gle C. On fait les côtés c a & c b *de cet angle égaux aux côtés CA & CB de l'angle C, chacun à chacun; & du point* a *au point* b, *on tire la ligne droite* a b.

Or, cette ligne est égale (n) *à la distance inaccessible AB; puisque* [C] *les triangles ABC &* a b c *ont l'angle C égal à l'angle* c, *& les côtés CA & CB qui forment le premier, égaux aux côtés* c a *&* c b *qui forment le second, chacun à chacun. Ainsi, si l'on mesure la ligne* a b, *ce sera la même chose que si l'on mesuroit la distance AB.* N. 82.

Il est plus commode de rapporter sur le papier le triangle ABC par le moyen d'une échelle, que de le rapporter sur le terrein; & cette derniere maniere fait également connoître la valeur de la distance AB; parce que le côté a b *du triangle rapporté contient autant de parties de l'échelle, que la distance AB contient de fois la mesure dont on s'est servi pour mesurer les rayons visuels CA & CB, comme on le démontre par la sixieme proposition du sixieme Livre.*



PROPOSITION V.

THÉORÊME.

84. *Si dans un triangle deux côtés sont égaux, les angles qui leur sont opposés seront aussi égaux.*

Fig. 31. SI dans le triangle ABC* le côté BA est égal au côté BC, l'angle C sera égal à l'angle A.

Const. Supposez qu'une ligne droite BD divise l'angle ABC en deux parties égales CBD & ABD.

Démonst. Dans les triangles BDC & BDA, l'angle CBD est égal [c] à l'angle ABD, le côté BC au côté BA [H], &
N. 82. le côté BD est commun. Ainsi (n), l'angle C est égal à l'angle A.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

85. Il suit de ce théorême, que *dans un triangle équilatéral, tous les angles sont égaux.*



PROPOSITION VI.

THÉORÊME.

86. *Si dans un Triangle deux angles ſont égaux, les côtés qui leur ſont oppoſés ſeront auſſi égaux.*

SI dans le triangle ABC* l'angle A eſt égal à l'angle C, le côté BC ſera égal au côté BA. Fig. 33.

Démonſt. Si le côté BC n'étoit point égal au côté BA, il ſeroit ou plus grand, ou plus petit que ce dernier côté ; & par conſéquent, pour le lui rendre égal, il faudroit ou le diminuer, ou l'augmenter. Mais, on ne peut ni diminuer ni augmenter ce côté BC, ſans diminuer ou augmenter en même temps l'angle A ; & par conſéquent, ſans faire ceſſer cet angle d'être égal à l'angle C. Donc, ſi l'angle A eſt égal à l'angle C, le côté BC ne peut point être inégal au côté BA ; & par conſéquent, il lui eſt égal.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

87. Il ſuit de ce théorême, que *ſi dans un triangle tous les angles ſont égaux, ce triangle ſera équilatéral.*

PROPOSITION VIII. †

THÉORÊME.

88. *Si deux triangles ont les côtés égaux aux côtés, chacun à chacun : ils auront aussi les angles égaux aux angles, chacun à chacun ; & la surface égale à la surface.*

Fig. 34. SI dans les triangles ABC * & DEF le côté AC est égal au côté DF, le côté AB au côté DE, & le côté BC au côté EF ; l'Angle B sera égal à l'angle E, l'angle C à l'angle F, l'angle A à l'angle D, & le triangle ABC au triangle DEF.

Const. Du point D pris pour centre, & avec le côté DE pris pour rayon, décrivez le cercle EG. Du point F pris pour centre, & avec le côté EF pris pour rayon, décrivez un autre cercle EH. Posez ensuite par pensée le triangle ABC sur le triangle DEF, de maniere que le point A étant sur le point D, le côté AC soit sur le côté DF.

Démonst. Premiérement, le point C
N. 70. tombera sur le point F (n) ; puisque [H] le côté AC est égal au côté DF.

† Nous supprimons la septieme Proposition d'Euclide, parce qu'elle est comprise dans la huitieme.

Secondement, le point B, extrémité du côté AB, tombera (n) ſur la circonférence du cercle EG; puiſque [C] le point A ſera ſur le point D, & que [H] le côté AB eſt égal au côté DE, qui [C] eſt le rayon de ce cercle. N. 35.

Mais (n) le même point B, extrémité du côté BC, tombera auſſi ſur la circonférence du cercle EH; puiſque [D] le point C ſera ſur le point F, & que [H] le côté BC eſt égal au côté EF, qui [C] eſt le rayon de cet autre cercle. N. 35.

Donc le point B tombera ſur un point commun à ces deux circonférences; & par conſéquent ſur le point E, puiſque ces deux circonférences n'ont au deſſus du côté DF que ce ſeul point de commun.

Or, puiſque le point A étant [C] ſur le point D, le point C tombe ſur le point F, & le point B ſur le point E; les triangles ABC & DEF ſe couvrent réciproquement. Donc (n), l'angle B eſt égal à l'angle E, l'angle C à l'angle F, l'angle A à l'angle D, & le triangle ABC au triangle DEF. N. 69.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

SCHOLIE.

89. *On vient de voir que dans les trian-*

gles l'égalité des côtés néceſſite celle des angles. Mais il faut bien ſe donner de garde d'en conclure que l'égalité des angles néceſſite auſſi celle des côtés. On verra dans la ſuite, que les triangles qui ont tous leurs angles égaux, chacun à chacun, ſont très-ſouvent inégaux; quoique alors ils ſoient toujours néceſſairement ſemblables.

PROPOSITION IX.

PROBLÊME.

90. *Diviſer un angle en deux parties égales.*

Fig. 35. IL faut diviſer l'angle ABC * en deux parties égales.

Conſt. Du point B pris pour centre, & avec un rayon BD pris à volonté, décrivez deux arcs qui coupent, l'un en un point D & l'autre en un point E, les côtés BA & BC de l'angle ABC. Des points D & E pris pour centres, & avec le même rayon BD, (ou avec un autre pris auſſi à volonté, mais cependant plus grand que la moitié de la diſtance du point D au point E,) décrivez deux arcs qui ſe coupent en un point F. Enfin, tirez du point B par le point F la ligne droite

BF. Elle divifera l'angle ABC en deux parties ABF & CBF qui feront égales.

Pour la démonftration, tirez du point F aux points D & E, les lignes droites FD & FE.

Démonft. Dans les triangles DBF & EBF, le côté BD eft égal [c] au côté BE, le côté FD au côté FE [c], & le côté BF eft commun. Ainfi (n), l'angle ABF N. 88.
eft égal à l'angle CBF.

Par conféquent, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

91. Il fuit de ce problême, que *pour divifer un angle en quatre parties égales, il faut commencer par le divifer en deux parties égales, & divifer enfuite chacune de ces deux parties égales en deux autres qui le foient auffi. Et ainfi de fuite, pour le divifer en 8, en 16, en 32, &c.*

SCHOLIE.

92. *Il eft fouvent néceffaire de divifer un angle en un nombre déterminé de parties égales. Mais lorfque ce nombre n'eft pas 2, 4, 8, 16, & ainfi de fuite en doublant, le problême n'eft plus du reffort de la Géométrie élémentaire; & il eft démontré qu'on ne peut le réfoudre que par celle des lignes courbes. On le nomme alors*

le problême de la trisection *de l'angle. Il a été fort recherché par les anciens Géometres, & abandonné avec raison par les modernes.*

PROPOSITION X.

PROBLÊME.

93. *Diviser une ligne droite en deux parties égales.*

IL faut diviser en deux parties égales la
Fig. 36. ligne droite AB*.

Conſt. Des points A & B pris pour centres, & avec un rayon AC pris à volonté, (mais cependant plus grand que la moitié de la ligne AB,) décrivez deux arcs qui se coupent en un point C. Des mêmes points A & B pris pour centres, & avec le même rayon AC, (ou avec un autre AD pris aussi à volonté, mais cependant toujours plus grand que la moitié de la ligne AB,) décrivez deux arcs qui se coupent en un point D. Enfin, tirez du point C au point D la ligne droite CD. Elle divisera la ligne AB en deux parties AE & EB qui seront égales.

Pour la démonstration, tirez du point C aux points A & B, les lignes droites CA & CB. Tirez aussi du point D aux

mêmes points A & B, les lignes droites DA & DB.

Démonst. Dans les triangles ACD & BCD, le côté CA est égal [C] au côté CB, le côté DA au côté DB [C], & le côté CD est commun. Ainsi (n), l'angle ACD est égal à l'angle BCD. Or, dans les triangles ACE & BCE, l'angle ACD est égal [D] à l'angle BCD, le côté CA au côté CB [C], & le côté CE est commun. Ainsi (n), le côté AE est égal au côté EB. N. 88. N. 82.

Par conséquent, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

94. Il suit de ce problême, que *pour diviser une ligne droite en quatre parties égales, il faut commencer par la diviser en deux parties égales, & diviser ensuite chacune de ces deux parties égales en deux autres qui le soient aussi; & ainsi de suite, pour la diviser en 8, en 16, en 32, &c.*

Nous donnerons au sixieme Livre la maniere de diviser une ligne droite en tel nombre de parties égales que l'on voudra.



PROPOSITION XI.

PROBLÊME.

95. *D'un point donné ſur une ligne droite, élever une perpendiculaire à cette ligne.*

Fig. 37. IL faut élever du point C * une perpendiculaire à la ligne droite AB.

Conſt. Du point C pris pour centre, & avec un rayon CD pris à volonté, décrivez deux arcs qui coupent, l'un en un point D & l'autre en un point E, la ligne A B prolongée s'il eſt néceſſaire. Des points D & E pris pour centres, & avec un rayon DF pris auſſi à volonté, (mais cependant plus grand que le rayon CD,) décrivez deux arcs qui ſe coupent en un point F. Enfin, tirez du point F au point C la ligne droite FC; elle ſera perpendiculaire à la ligne AB.

Pour la démonſtration, tirez du point F aux points D & E, les lignes droites FD & FE.

Démonſt. Dans les triangles DFC & EFC, le côté CD eſt égal [c] au côté CE, le côté FD au côté FE [c], & le
N. 88. côté FC eſt commun. Ainſi (n), l'angle FCD eſt égal à l'angle FCE; & par conſé-

quent (n), la ligne FC eſt perpendiculaire N. 19.
à la ligne AB.

Donc, C. Q. F. F.

PROPOSITION XII.

PROBLÊME.

96. *D'un point donné hors d'une ligne droite, abaiſſer une perpendiculaire à cette ligne.*

Il faut abaiſſer du point C * une perpen- Fig. 38.
diculaire à la ligne droite AB.

Conſt. Du point C pris pour centre, & avec un rayon CD pris à volonté, (mais cependant plus grand que la diſtance de ce point à la ligne AB,) décrivez deux arcs qui coupent, l'un en un point D & l'autre en un point E, cette ligne prolongée s'il eſt néceſſaire. Des points D & E pris pour centres, & avec le même rayon CD, (ou avec un autre DF pris auſſi à volonté, mais cependant plus grand que la moitié de la diſtance du point D au point E,) décrivez deux arcs qui ſe coupent en un point F. Enfin, tirez du point C par le point F la ligne droite CG; elle ſera perpendiculaire à la ligne AB.

Pour la démonſtration, tirez du point C aux points D & E, les lignes droites CD & CE. Tirez auſſi du point F aux mêmes points D & E, les lignes droites FD & FE. Prolongez enſuite la ligne CG juſqu'au point F.

Démonſt. Dans les triangles DCF & ECF, le côté CD eſt égal [c] au côté CE, le côté FD au côté FE [c], & le côté
N. 88. CF eſt commun. Ainſi (n), l'angle DCF eſt égal à l'angle ECF. Or, dans les triangles DCG & ECG, l'angle DCF eſt égal [D] à l'angle ECF, le côté CD au côté CE [c], & le côté CG eſt commun.
N. 82. Ainſi (n), l'angle CGD eſt égal à l'angle
N. 19. CGE; & par conſéquent (n) la ligne CG eſt perpendiculaire à la ligne AB.

Donc, C. Q. F. F.



PROPOSITION XIII.

THÉORÊME.

97. *Une ligne droite qui en rencontre une autre indirectement, forme avec elle, prolongée s'il est nécessaire, deux angles dont la somme est égale à celle de deux angles droits.*

LA somme des angles ABC* & ABD est égale à celle de deux angles droits. Fig. 39 & 40.

La ligne AB est ou perpendiculaire, ou oblique à la ligne CD.

Premier cas. *Lorsque la ligne AB* est perpendiculaire à la ligne CD.* Fig. 39.

Démonst. Les angles ABC & ABD sont deux angles droits (n). Ainsi leur somme est égale à celle de deux angles droits. N. 21.

Second cas. *Lorsque la ligne AB* est oblique à la ligne CD.* Fig. 40.

Const. Du point B, élevez (n) la perpendiculaire BE à la ligne CD. N. 95.

Démonst. La somme des deux angles ABC & ABD est égale (n) à celle des trois angles EBC, EBA & ABD. Or, celle de ces trois angles est égale (n) à celle des deux angles EBC & EBD; & [c] ces N. 72. N. 72.

deux derniers angles ſont deux angles
N. 62. droits. Donc (n), la ſomme des deux angles ABC & ABD eſt égale à celle de deux angles droits.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

98. Il ſuit de ce théorême, que *la ſomme de tous les angles qui ſont formés par pluſieurs lignes droites tirées d'un même point & en tout ſens, eſt égale à celle de quatre angles droits.*

FIG. 41. La ſomme de tous les angles ACB *, BCD, DCE, ECF & FCA, eſt égale à celle de quatre angles droits.

Conſt. Prolongez l'un des côtés de ces angles, par exemple le côté AC, vers G à volonté.

Démonſt. La ſomme des trois angles
N. 71. BCD, DCE & ECF, eſt égale (n) à celle des deux angles BCG & GCF. Mais
N. 97. (n), les angles ACB & BCG valent enſemble deux angles droits; & il en eſt de même des angles FCA & GCF. Donc, la ſomme des angles ACB, BCD, DCE, ECF & FCA, eſt égale à celle de quatre angles droits.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

USAGE.

USAGE.

99. *On se sert de cette proposition, de la maniere suivante, pour connoître sur le terrein la valeur d'un angle dans lequel on ne peut point entrer ; par exemple, celle d'un angle ABC * formé par le concours de deux murs BA & BC.* Fig 44.

Par le moyen d'une corde, ou de quelque autre instrument, on prolonge à volonté vers D, l'alignement de l'un A B de ces deux murs. On mesure † ensuite l'angle DBC formé par le prolongement BD & par le mur BC. Et puisque (n) *les angles ABC & DBC valent ensemble* 180 *degrés, la différence de ce dernier angle à* 180, *sera la valeur de l'angle cherché ABC.* N. 97.

Si l'on trouve que l'angle DBC soit, par exemple, de 117 *degrés, on en conclura que l'angle ABC est de* 63 *degrés.*

† La maniere la plus sûre de mesurer sur le terrein ces sortes d'angles, est de joindre leurs côtés par une ligne droite quelconque DC, afin d'avoir un triangle DBC : de mesurer ensuite, le plus exactement qu'il est possible, les côtés de ce triangle : & de chercher enfin la valeur de l'angle proposé DCB, comme nous l'avons enseigné dans notre trigonométrie.



PROPOSITION XIV.

THÉORÊME.

100. *Si deux lignes droites qui ſont tirées de l'extrémité d'une troiſieme, forment avec cette troiſieme deux angles dont la ſomme ſoit égale à celle de deux angles droits, ces deux lignes ne feront qu'une ſeule ligne droite.*

Fig. 42. Si la ſomme des angles ABC* & ABD eſt égale à celle de deux angles droits, les deux lignes droites BC & BD ne font qu'une ſeule ligne droite CBD.

Conſt. Tirez du point B aux points E & F pris à volonté, l'un au deſſus de la ligne BD, & l'autre au deſſous, les lignes droites BE & BF.

Démonſt. Si les deux lignes BC & BD ne faiſoient point une ſeule ligne droite CBD, la ligne BC étant prolongée vers D, paſſeroit ou au deſſus de la ligne BD, ou au deſſous.

Or, ſi elle paſſoit au deſſus, & étoit, par exemple la ligne CBE; la ſomme des angles ABC & ABE ſeroit égale à celle
N. 97. de deux angles droits (n). Mais [H], celle des angles ABC & ABD lui eſt auſſi égale,

Donc (n), la somme des angles ABC & ABE seroit égale à celle des angles ABC & ABD. Ce qui n'est point, puisque cette premiere somme differe de la derniere, de l'angle EBD. N. 62.

Et si elle passoit au dessous, & étoit, par exemple, la ligne CBF; la somme des angles ABC & ABF seroit égale à celle de deux angles droits (n). Mais [H], celle des angles ABC & ABD lui est aussi égale. Donc (n), la somme des angles ABC & ABF seroit égale à celle des angles ABC & ABD. Ce qui n'est point encore, puisque cette premiere somme surpasse la derniere, de l'angle FBD. N. 97. N. 62.

Donc la ligne BC étant prolongée vers D, passe sur la ligne BD; & par conséquent ces deux lignes ne font qu'une seule ligne droite CBD.

Donc, C. Q. F. D.



PROPOSITION XV.

THÉORÊME.

101. *Deux lignes droites qui ſe coupent, forment quatre angles, dont chacun eſt égal à celui qui lui eſt oppoſé au ſommet.*

Fig. 43. LES angles AEC * & BED ſont égaux : & il en eſt de même des angles CEB & AED.

Démonſt. La ſomme des angles AEC &
N. 97. CEB eſt égale (n) à celle de deux angles droits ; & celle des angles CEB & BED
N. 61. l'eſt auſſi. Donc (n), la ſomme des angles AEC & CEB eſt égale à celle des angles CEB & BED. Par conſéquent, ſi l'on retranche le même angle CEB de chacune de ces deux ſommes, les reſtes, qui ſeront
N. 64. les angles ACE & BED, ſeront égaux (n).

Or, on démontre de la même maniere, que les angles CEB & AED ſont auſſi égaux.

Par conſéquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION XVI.

THÉORÊME.

102. *L'angle extérieur d'un triangle est plus grand qu'aucun des angles intérieurs de ce même triangle, qui sont opposés à cet angle.*

L'ANGLE extérieur BCD* du triangle ABC, est plus grand qu'aucun des deux angles intérieurs ABC & BAC qui lui sont opposés. Fig. 45.

Premiérement. *Pour l'angle ABC.*

Const. Divisez (n) le côté BC en deux parties égales EB & EC. Tirez du point A par le point E, la ligne droite indéfinie AF. Faites (n) la ligne EF égale à la ligne EA. Enfin, tirez du point F au point C la ligne droite FC. N. 93. N. 81.

Démonst. L'angle BCD est plus grand (n) que l'angle BCF. Or, l'angle BCF est égal (n) à l'angle ABC; puisque, dans les triangles AEB & FEC, l'angle AEB est égal (n) à l'angle FEC qui lui est opposé au sommet, le côté EB au côté EC [c], & le côté EA au côté EF [c]. Donc l'angle BCD est plus grand que l'angle ABC. N. 72. N. 82. N. 101.

Secondement. *Pour l'angle BAC.*

N. 93. *Conſt.* Diviſez (n) le côté AC en deux parties égales GC & GA. Tirez du point B par le point G, la ligne droite indéfi-
N. 81. nie BH. Faites (n) la ligne GH égale à ligne GB. Enfin, tirez du point H par le point C, la ligne droite indéfinie HF.

N. 72. *Démonſt.* L'angle BCD eſt (n) plus grand que l'angle FCD. Or, l'angle FCD
N. 101. eſt égal (n) à l'angle ACH qui lui eſt oppoſé au ſommet : & l'angle ACH eſt
N. 82. égal (n) à l'angle BAC; puiſque, dans les triangles HGC & BGA, l'angle HGC eſt
N. 101. égal (n) à l'angle BGA, le côté GC au côté GA [c], & le côté GH au côté GB [c]. Donc l'angle BCD eſt plus grand que l'angle BAC.

Par conſéquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION XVII.

THÉORÊME.

103. *La somme de deux quelconques des angles d'un triangle, est plus petite que celle de deux angles droits.*

DANS le triangle ABC *, la somme des angles, par exemple BCA & B, est plus petite que celle de deux angles droits. Fig. 42.

Const. Prolongez le côté AC vers D, à volonté.

Démonst. La somme des angles BCA & BCD est égale (n) à celle de deux angles droits. Or (n), l'angle BCD, qui est extérieur au triangle ABC, est plus grand que l'angle intérieur B qui lui est opposé. Donc la somme des angles BCA & B est plus petite que celle de deux angles droits. N. 97. N. 102.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

104. Il suit de ce théorême, que *si dans un triangle l'un des angles est ou droit, ou obtus, les deux autres seront aigus.*

Démonst. Si dans un triangle un angle étant ou droit, ou obtus, un autre l'étoit aussi, la somme de deux des angles de ce triangle seroit ou aussi grande, ou plus grande que celle de deux angles droits.

N. 103. Or (n), cela ne peut point être.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

105. Il suit de ce corollaire, que *chaque angle d'un triangle équilatéral est aigu ; & qu'il en est de même de chaque angle égal d'un triangle isoscele.*

Démonst. Si l'un des angles d'un triangle équilatéral étoit ou droit, ou obtus, chaque autre angle du même triangle le

N. 85. seroit aussi ; puisque (n) tous les angles d'un triangle équilatéral sont égaux. Mais

N. 104. (n), un triangle ne peut avoir ni plus d'un angle droit, ni plus d'un angle obtus.

Donc, C. Q. F. 1° D.

Pareillement, si l'un des angles égaux d'un triangle isoscele étoit ou droit, ou obtus, ce triangle auroit ou deux angles

N. 104. droits, ou deux angles obtus. Or (n), cela ne peut point être.

Donc, C. Q. F. 2° D.

COROLLAIRE III.

106. Il suit aussi de ce même corol-

laire, que *d'un point hors d'une ligne droite, on ne peut abaiſſer qu'une ſeule perpendiculaire à cette ligne.*

Si la ligne droite CD* eſt perpendiculaire à la ligne droite AB, toute autre ligne droite tirée à cette ligne AB d'un point quelconque de cette perpendiculaire, lui ſera oblique. Fig. 47.

Conſt. Tirez du point C pris à volonté ſur la ligne CD, à un point quelconque E de la ligne AB, la ligne droite CE.

Démonſt. Si les lignes CD & CE étoient perpendiculaires chacune à la même ligne AB, l'angle CDE ſeroit droit (n), N. 21. & l'angle CED le ſeroit auſſi (n). Ainſi N. 21. le triangle ECD auroit deux angles droits. Or (n), cela ne peut point être. Donc, N. 104. ſi la ligne CD eſt perpendiculaire à la ligne AB, la ligne CE ne l'eſt point.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE IV.

107. Il ſuit encore du même corollaire, que *ſi d'un point quelconque d'une ligne droite qui eſt oblique à une autre, on abaiſſe une perpendiculaire à cette autre; cette perpendiculaire ſera du côté auquel l'oblique forme un angle aigu avec cette autre ligne.*

Fig. 48. Si d'un point quelconque C* de la ligne droite CE, qui eſt oblique à la ligne droite AB, on abaiſſe une perpendiculaire à cette ligne AB; cette perpendiculaire ſera du côté de l'angle aigu CEB.

Conſt. Tirez du point C à un point quelconque F de la partie AE de la ligne AB, une ligne droite CF.

Démonſt. Si la perpendiculaire abaiſſée du point C à la ligne AB, étoit une ligne droite quelconque CF tirée du côté de l'angle obtus CEA, le triangle FCE au-
N. 21. roit (n) un angle droit CFE, & [H] un
N. 104. angle obtus CEA. Or (n), un triangle ne peut point avoir un angle droit & un angle obtus. Donc la perpendiculaire abaiſſée du point C à la ligne AB, ſera du côté de l'angle aigu CEB.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE V.

108. Il ſuit enfin du dernier corollaire, que *ſi de l'un des angles d'un triangle on abaiſſe une perpendiculaire au côté qui eſt oppoſé à cet angle, cette perpendiculaire ſera dans ce triangle, ſi les angles adjacens à ce côté ſont de même eſpece* †; *& hors de*

† On appelle angles *de même eſpece*, ceux qui ſont ou tous aigus, ou tous obtus; & angles *de différente eſpece*, ceux dont les uns ſont aigus, & les autres obtus.

ce triangle, si ces mêmes angles sont de différente espece.

Premiérement. Si de l'angle B * du triangle ABC, dont les angles A & BCA adjacens au côté AC sont aigus, on abaisse une perpendiculaire à ce côté, elle sera dans ce triangle. Fig. 46.

Démonst. La perpendiculaire tirée de l'angle B au côté CA, doit être (n) du côté de l'angle aigu BAC, par rapport à l'oblique BA; & du côté de l'angle aigu BCA, par rapport à l'oblique BC. Donc elle doit rencontrer le côté AC entre les points A & C; & par conséquent, elle doit être dans le triangle ABC. N. 107.

Secondement. Si de l'angle C * du triangle FCE, dont les angles CFE & CEF adjacens au côté FE, sont l'un aigu & l'autre obtus, on abaisse une perpendiculaire à ce côté, elle sera hors de ce triangle. Fig. 48.

Démonst. La perpendiculaire tirée de l'angle C au côté FE, ne peut point (n) être du côté de l'angle obtus CEF, par rapport à l'oblique CE. Donc il faut qu'elle soit du côté de l'angle aigu CEB; & par conséquent hors du triangle FCE. N. 107.

Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÊME.

109. *Si dans un triangle un côté eſt plus grand qu'un autre, l'angle oppoſé à ce premier côté, ſera plus grand que l'angle oppoſé à cet autre côté.*

Fig. 49. SI dans le triangle ABC *, le côté BC eſt plus grand que le côté BA, l'angle BAC ſera plus grand que l'angle C.

N. 81. *Conſt.* Prenez (n) ſur le côté BC, une partie BD égale au côté BA. Tirez enſuite du point D au point A la ligne droite DA.

Démonſt. L'angle BAC eſt plus grand
N. 72. (n) que l'angle BAD. Or, l'angle BAD
N. 84. eſt égal (n) à l'angle BDA, puiſque [c] les côtés BD & BA du triangle ABD ſont égaux : & l'angle BDA qui eſt extérieur
N. 102. au triangle ADC, eſt plus grand (n) que l'angle intérieur C qui lui eſt oppoſé. Donc l'angle BAC eſt plus grand que l'angle C.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

110. Il ſuit de ce théorême : premiérement, que *dans un triangle, le plus*

grand angle eſt oppoſé au plus grand côté. Secondement, que *les angles d'un triangle ſcalène ſont inégaux.*

PROPOSITION XIX.

THÉORÊME.

111. *Si dans un triangle un angle eſt plus grand qu'un autre, le côté oppoſé à ce premier angle, ſera plus grand que le côté oppoſé à cet autre angle.*

Si dans le triangle ABC * l'angle A eſt plus grand que l'angle C, le côté BC ſera plus grand que le côté BA. Fig. 50.

Démonſt. Si le côté BC étoit égal au côté BA, l'angle A ſeroit égal à l'angle C (n) : & ſi le côté BC étoit plus petit que le côté BA, l'angle A ſeroit plus petit que l'angle C (n). Or, l'angle A n'eſt ni égal à l'angle C, ni plus petit que l'angle C, puiſque [H] il le ſurpaſſe. Donc le côté BC eſt plus grand que le côté BA.

N. 84. N. 109.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

112. Il ſuit de ce théorême : Premiérement, que *dans un triangle, le plus grand côté eſt oppoſé au plus grand angle,*

Secondement, que *si les angles d'un triangle sont inégaux, ce triangle sera scalêne.*

COROLLAIRE II.

113. Il suit aussi de ce même théorême, que *de toutes les lignes que l'on peut tirer d'un même point à une même ligne droite, la perpendiculaire est la plus courte.*

Fig. 47. La ligne droite CD* qui est perpendiculaire à la ligne droite AB, est la plus courte de toutes les lignes que l'on peut tirer du point C à cette ligne AB.

Const. Tirez du point C à un point quelconque E de la ligne AB, une ligne droite CE.

Démonst. L'angle CDE est le plus grand
N. 104. angle du triangle ECD (n); puisque la ligne CD étant [H] perpendiculaire à la
N. 21. ligne AB, cet angle est droit (n). Ainsi l'oblique CE est opposée à un plus grand angle que la perpendiculaire CD; & par
N. 111. conséquent (n) elle est plus grande que cette perpendiculaire.

Or, la même démonstration subsiste, quelque près que le point E soit du point D. Donc, C. Q. F. D.



PROPOSITION XX.

THÉORÊME.

114. *Dans un triangle, chaque côté est plus petit que la somme des deux autres.*

DANS le triangle ABC*, la somme des côtés, par exemple AB & BC, est plus grande que le côté AC. Fig. 51.

Const. Prolongez le côté AB vers D, indéfiniment. Faites (n) le prolongement BD égal au côté BC. Enfin, tirez du point D au point C la ligne droite DC. N. 81.

Démonst. L'angle ACD est (n) plus grand que l'angle BCD. Or l'angle BCD est égal (n) à l'angle D; puisque [c] les côtés BD & BC du triangle CBD sont égaux. Donc l'angle ACD est plus grand que l'angle D; & par conséquent (n), dans le triangle ADC, le côté ABD est plus grand que le côté AC. Mais [c], ce côté ABD est la somme des côtés AB & BC du triangle ABC. Donc, dans le triangle ABC, la somme des côtés AB & BC est plus grande que le côté AC. N. 72. N. 84. N. 111.

Par conséquent, C. Q. F. D. †.

† On auroit pu mettre ce théorême au rang des axiomes.

PROPOSITION XXI.

PROBLÊME.

115. *Si deux lignes droites qui ſont tirées des extrémités de l'un des côtés d'un triangle, ſe rencontrent dans ce triangle, leur ſomme ſera plus petite que celle des deux autres côtés de ce même triangle; mais l'angle qu'elles formeront ſera plus grand que celui qui eſt formé par ces deux autres côtés.*

PREMIÉREMENT, dans le triangle
Fig. 52. ABC*, la ſomme ADC des deux lignes droites AD & DC, eſt plus petite que la ſomme ABEC des deux côtés AB & BC.

Conſt. Prolongez l'une de ces lignes, par exemple la ligne AD, juſqu'à ce qu'elle rencontre en un point E, l'un des côtés du triangle ABC.

Démonſt. Dans le triangle ABE, la
N. 114. ſomme ABE des côtés AB & BE eſt (n) plus grande que le côté ADE. Ainſi, ſi & à cette ſomme & à ce côté on ajoute la même ligne EC, la ſomme ABEC ſera
N. 65. (n) plus grande que la ſomme ADEC.

Pareillement, dans le triangle DEC, la ſomme DEC des côtés DE & EC eſt

(n) plus grande que le côté DC. Ainſi, N. 114.
ſi & à cette ſomme & à ce côté on ajoute la même ligne AD, la ſomme ADEC ſera (n) plus grande que la ſomme ADC. N. 65.

Or, puiſque [D] la ſomme ABEC eſt plus grande que la ſomme ADEC, & que cette derniere ſomme eſt plus grande que la ſomme ADC, la ſomme ABEC eſt plus grande que la ſomme ADC.

Donc, C. Q. F. 1° D.

SECONDEMENT, dans le même triangle ABC, l'angle ADC eſt plus grand que l'angle B.

Démonſt. L'angle ADC, qui eſt extérieur au triangle DEC, eſt (n) plus grand N. 102.
que l'angle intérieur DEC qui lui eſt oppoſé. Or, cet angle DEC, qui eſt extérieur au triangle ABE, eſt auſſi (n) plus N. 102.
grand que l'angle intérieur B qui lui eſt oppoſé. Donc l'angle ADC eſt plus grand que l'angle B.

Par conſéquent, C. Q. F. 2° D.



PROPOSITION XXII.

PROBLÊME.

116. *Décrire un triangle qui ait les côtés égaux à trois lignes droites données, chacun à chacune ; pourvu cependant que chacune de ces lignes ſoit plus petite*
N. 114. *que la ſomme des deux autres* (n).

IL faut décrire un triangle qui ait les
Fig. 53. côtés égaux aux lignes droites A *, B & C, chacun à chacune.

N. 79. *Conſt.* Tirez (n) une ligne droite DF, qui ſoit égale à l'une des lignes données, par exemple à la ligne A. Du point D pris pour centre, & avec un rayon égal à l'une des autres lignes données, par exemple à la ligne B, décrivez un arc de cercle EG. Du point F pris pour centre, & avec un rayon égal à la ligne C, décrivez un arc de cercle qui coupe le précédent en un point E. Enfin, tirez du point E aux points D & F, les lignes droites ED & EF. Le triangle DEF que ces lignes formeront avec la ligne DF, ſera le triangle demandé.

Démonſt. Dans le triangle DEF, le côté DF eſt égal à la ligne A [c], le côté

ED à la ligne B [c], & le côté EF à la ligne C [c]. Donc les côtés de ce triangle ſont égaux aux lignes données, chacun à chacune.

Par conſéquent, C. Q. F. F.

USAGE.

On peut ſe ſervir de cette propoſition, pour lever le plan d'un terrein quelconque. Mais comme il y a des terreins que l'on peut traverſer en tel ſens que l'on veut; & d'autres au contraire dans leſquels on ne peut point entrer, cet uſage a deux cas.

PREMIER CAS.

117. Lorſqu'il s'agit d'un terrein ABCDE * que l'on peut traverſer en tel Fig. 54.
ſens que l'on veut.

On ſuppoſe que le terrein propoſé eſt diviſé en triangles ABC, CAD & DAE; & l'on meſure les côtés de ces triangles. On fait enſuite une échelle F proportionnée à la grandeur que l'on veut donner au plan de ce terrein. Enfin, on décrit (n) N. 116.
des triangles abc, cad *&* dae, *dont chaque côté contienne autant de parties de l'échelle F, que chaque côté correſpondant des triangles ABC, CAD & DAE contient de fois la meſure dont on s'eſt ſervi pour le meſurer; & la figure* abcde, *for-*

mée par les triangles abc, cad, *&c. eſt le plan du terrein propoſé ABCDE.*

SECOND CAS.

118. Lorſqu'il s'agit d'un terrein
Fig. 55. ABCDE* dans lequel on ne peut point entrer; ou d'un terrein que l'on ne peut parcourir que vers les ſommets de quelques-uns de ſes angles.

On néglige deux angles à volonté, mais cependant pris de ſuite; par exemple, les angles E & D. On fait enſuite planter des piquets, Premiérement aux points I & K pris à volonté ſur les côtés BA & BC de l'angle B, que nous ſuppoſons être l'un de ceux que l'on peut parcourir: Secondement, aux points G & M pris à volonté ſur les prolongemens indéfinis des côtés AE & CD des angles A & C, que nous ſuppoſons être ceux dans leſquels on ne peut point entrer: Troiſiémement, aux points H & L pris auſſi à volonté ſur les autres côtés AB & BC des mêmes angles. Enfin, après avoir ſuppoſé des lignes droites tirées du point I au point K, du point G aux points A & H, & du point M aux points C & L; on meſure les côtés EA, AB, BC & CD du terrein propoſé, & ceux des triangles AGH, IBK & LMC.

On fait ensuite une échelle F proportionnée à la grandeur que l'on veut donner au plan du terrein proposé. On décrit (n) N. 116. *un triangle* a g h *dont chaque côté contienne autant de parties de l'échelle F, que chaque côté correspondant du triangle AGH contient de fois la mesure dont on s'est servi pour le mesurer. On prolonge les côtés* a h *&* g a *de ce triangle, l'un vers* b *& l'autre vers* e, *jusqu'à ce que les lignes* a b *&* a e *contiennent aussi chacune autant de parties de cette échelle, que les côtés correspondans AB & AE du terrein contiennent de fois chacun cette mesure.*

On décrit ensuite un triangle i b k, *de la même maniere dont on a décrit le triangle* a g h, *en donnant à chacun de ses côtés le nombre des parties de l'échelle F, qui lui convient; & l'on prolonge vers* c *le côté* b k, *jusqu'à ce que la ligne* b c *contienne autant de parties de l'échelle qu'elle doit en contenir. On décrit aussi le triangle* l m c *de la même maniere dont on a décrit les précédents; & l'on prolonge aussi son côté* m c *vers* d, *jusqu'à ce que la ligne* c d *contienne le nombre des parties de l'échelle qu'elle doit contenir. Enfin, du point* e *on tire au point* d *la ligne* e d; *& la figure* a b c d e *est le plan du terrein proposé ABCDE.*

A l'égard de la démonſtration de ces deux pratiques, elle dépend de la cinquieme & de la ſixieme propoſitions du ſixieme Livre.

PROPOSITION XXIII.

PROBLÊME.

119. *Décrire ſur une ligne droite donnée, un angle qui ait pour ſommet un point donné ſur cette même ligne, & qui ſoit égal à un angle donné.*

Fig. 56. Il faut décrire ſur la ligne droite AB*, un angle qui ait le point D pour ſommet, & ſoit égal à l'angle C.

Conſt. Tirez une ligne droite EF qui rencontre en deux points quelconques E & F, les côtés de l'angle C, prolongés s'il
N. 116. eſt néceſſaire. Décrivez enſuite (n) un triangle DHG qui ait le côté DG égal † à la ligne CE, le côté DH égal à la ligne CF, & le côté GH égal a la ligne EF. L'angle HDG ſera l'angle demandé.

Fig. 57. *Autre Conſt.* Du point C* pris pour centre, & avec un rayon CE pris à volonté, décrivez un arc de cercle EIF, qui rencontre en deux points E & F les côtés

† Si la ligne DB étoit plus courte que la ligne CE, on la prolongeroit autant qu'il ſeroit néceſſaire.

CE & CF de l'angle C, prolongés s'il eſt néceſſaire. Du point D pris pour centre, & avec le même rayon précédent CE, décrivez un arc de cercle GKH, indéterminé vers H; mais qui rencontre en un point G la ligne AB prolongée s'il eſt néceſſaire. Du point G pris pour centre, & avec un rayon égal à la diſtance du point E au point F, décrivez un arc de cercle qui coupe le précédent en un point H. Enfin, tirez du point D par le point H la ligne droite indéfinie DH. L'angle HDG que cette ligne formera avec la ligne AB, ſera l'angle demandé.

Pour la démonſtration, tirez du point E au point F une ligne droite EF; & du point G au point H, une ligne droite GH.

Démonſt. Dans les triangles DHG * Fig. 56
& CFE, le côté DG eſt égal au côté & 57.
CE [c], le côté DH au côté CF [c], & le côté GH au côté EF [c]. Donc (n), N. 88.
l'angle HDG eſt égal à l'angle C.

Par conſéquent, C. Q. F. F.

USAGE.

120. *On a donné deux conſtructions de ce Problême; parce que la ſeconde eſt la plus commode, lorſque l'on opere ſur le papier; & que, ſur le terrein, on peut ſe ſervir de la premiere, de la maniere ſuivante.*

Après avoir déterminé ſur les côtés de
Fig. 56. *l'angle C* les parties CE & CF à volonté, mais cependant d'une grandeur raiſonnable, on prend ſur la ligne AB prolongée s'il eſt néceſſaire, une partie DG égale à la diſtance CE. On tend enſuite une corde du point E au point F, & du point F au point C; & l'on met une marque ſur cette corde au point qui y répond au point F. On attache enſuite au point G le bout de cette même corde qui étoit au point E; & au point D, celui qui étoit au point C. Enfin, on prend cette corde par le point que l'on y a marqué: on s'avance vers H, juſqu'à ce que les deux parties de cette même corde ſoient également tendues; & alors le point par lequel on la tient, détermine ſur le terrein le point H, duquel il faut tirer au point D la ligne droite HD, afin d'avoir l'angle HDB égal à l'angle C.*



PROPOSITION

PROPOSITION XXIV.

THÉORÊME.

121. *Si de deux triangles le premier a un angle plus grand que l'un des angles du second, & les côtés qui forment ce premier angle égaux à ceux qui forment ce second angle, chacun à chacun; il aura aussi le côté opposé à ce premier angle, plus grand que le côté opposé à ce second angle.*

SI dans les triangles ABC * & DEF, l'angle B étant plus grand que l'angle DEF, le côté BA est égal au côté ED & le côté BC au côté EF; le côté AC est aussi plus grand que le côté DF. Fig. 58.

Const. Décrivez sur le côté ED (n), un angle DEG qui ait le point E pour sommet, & soit égal à l'angle B. Faites (n) la ligne EG égale au côté BC. Enfin, tirez du point G aux points D & F, les lignes droites GD & GF. N. 119. N. 79.

Démonst. L'angle DFG est (n) plus grand que l'angle EFG. Or (n), l'angle EFG est égal à l'angle EGF, puisque (n) les côtés EG & EF du triangle FEG sont égaux; & (n) l'angle EGF est plus grand N. 72. N. 84. N. 62. N. 72.

que l'angle DGF. Donc l'angle DFG est plus grand que l'angle DGF ; & par conséquent (n), dans le triangle DGF, le côté DG est plus grand que le côté DF. Mais (n), le côté AC est égal à ce côté DG ; puisque dans les triangles ABC & DEG, l'angle B est égal à l'angle DEG [c], le côté BA au côté ED [H], & le côté BC au côté EG [c]. Donc le côté AC est plus grand que le côté DF.

N. 111. N. 83.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXV.

THÉORÊME.

122. *Si de deux triangles le premier a un côté plus grand que l'un des côtés du second, & les autres côtés égaux aux autres côtés du second, chacun à chacun ; il aura aussi l'angle opposé à ce premier côté, plus grand que l'angle opposé à ce second côté.*

Fig. 59. SI dans les triangles ABC* & DEF, le côté AC étant plus grand que le côté DF, le côté BA est égal au côté ED & le côté BC au côté EF ; l'angle B est aussi plus grand que l'angle E.

Démonſt. Dans les triangles ABC & DEF, le côté BA eſt égal [H] au côté ED, & le côté BC au côté EF. Ainſi, ſi l'angle B étoit égal à l'angle E, le côté AC ſeroit (n) égal au côté DF; & ſi N. 82. l'angle B étoit plus petit que l'angle E, le côté AC ſeroit (n) plus petit que le N. 121. côté DF.

Or, le côté AC n'eſt ni égal au côté DF, ni plus petit que le côté DF, puiſque [H] il le ſurpaſſe. Donc l'angle B eſt plus grand que l'angle E.

Par conſéquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION XXVI.

THÉORÊME.

123. *Si deux triangles ont un côté égal à un côté, & les angles adjacens à ce premier côté égaux aux angles adjacens à ce ſecond côté, chacun à chacun : ils auront auſſi le troiſieme angle égal au troiſieme angle ; les autres côtés égaux aux autres côtés, chacun à chacun ; & la ſurface égale à la ſurface.*

Il en ſera de même, *ſi deux triangles ont un côté égal à un côté ; l'un des angles adjacens à ce premier côté, égal à l'un des angles adjacens à ce ſecond côté ; & l'angle oppoſé à ce même premier côté, égal à l'angle oppoſé à ce même ſecond côté.*

PREMIÉREMENT. Si dans les triangles
fig. 60. ABC * & DEF, le côté AC eſt égal au côté DF, l'angle A à l'angle D, & l'angle C à l'angle F ; l'angle B eſt égal à l'angle E, le côté AB au côté DE, le côté CB au côté FE, & le triangle ABC au triangle DEF.

Conſt. Poſez par penſée le triangle

ABC ſur le triangle DEF ; de maniere que le point A étant ſur le point D, le côté AC ſoit ſur le côté DF.

Démonſt. Le côté AB tombera ſur le côté DE (n), puiſque [H] l'angle A eſt égal à l'angle D. Le point C tombera ſur le point F (n), puiſque [H] le côté AC eſt égal au côté DF. Enfin, le côté CB tombera ſur le côté FE (n), puiſque [H] l'angle C eſt égal à l'angle F. N. 71. N. 70. N. 71.

Or, puiſque le côté AC étant [C] ſur le côté DF, le côté AB tombe ſur le côté DE, & le côté CB ſur le côté FE ; les triangles ABC & DEF ſe couvrent réciproquement. Donc (n), l'angle B eſt égal à l'angle E, le côté AB au côté DE, le côté CB au côté FE, & le triangle ABC au triangle DEF. N. 69.

Par conſéquent, C. Q. F. 1° D.

SECONDEMENT. Si dans les triangles ABC * & DEF, le côté AC eſt égal au côté DF, l'angle A à l'angle D, & l'angle B à l'angle DEF ; l'angle C eſt égal à l'angle DFE, le côté AB au côté DE, le côté CB au côté FE, & le triangle ABC au triangle DEF. Fig. 61.

Conſt. Prolongez le côté DE vers H, indéfiniment. Tirez du point F aux points G & I pris à volonté ſur la ligne DH,

l'un au dessous du point E & l'autre au dessus, les lignes droites FG & FI. Posez ensuite par pensée le triangle ABC sur le triangle DEF ; de maniere que le point A étant sur le point D, le côté AC soit sur le côté DF.

Démonst. Le côté AB tombera sur le
N. 71. côté DE (n), puisque [H] l'angle A est égal à l'angle D ; & le point C tombera
N. 70. sur le point F (n), puisque [H] le côté AC est égal au côté DF. Ainsi il ne s'agit plus que de démontrer que le côté CB tombera sur le côté FE.

Or, premiérement, si le côté CB tomboit au dessous du côté FE, par exemple sur la ligne FG, l'angle DGF seroit égal
N. 69. à l'angle B (n). Mais [H], l'angle B est égal
N. 62. à l'angle DEF. Donc (n), l'angle DGF, qui est extérieur au triangle GEF, seroit égal à l'angle DEF qui lui est opposé ;
N. 102. ce qui ne peut être (n).

Secondement, si le côté CB tomboit au dessus du côté FE, par exemple sur la ligne FI, l'angle DIF seroit égal à l'angle
N. 69. B (n). Mais [H], l'angle B est égal à l'an-
N. 62. gle DEF. Donc (n), l'angle DIF, qui est intérieur au triangle EIF, seroit égal à l'angle extérieur DEF auquel il est op-
N. 102. posé ; ce qui ne peut encore être (n).

Donc le côté CB tombera sur le côté FE.

Or, puiſque le côté AC étant [c] ſur le côté DF, le côté AB tombe ſur le côté DE, & le côté CB ſur le côté FE; les triangles ABC & DEF ſe couvrent réciproquement. Donc (n), l'angle C eſt égal à l'angle DFE, le côté AB au côté DE, le côté CB au côté FE, & le triangle ABC au triangle DEF. N. 69.

Par conſéquent, C. Q. F. 2° D.

USAGE.

On peut ſe ſervir de cette propoſition, pour meſurer telle diſtance inacceſſible que ce puiſſe être, pourvu que l'on en puiſſe voir les extrémités. Mais comme une diſtance inacceſſible peut être acceſſible par l'une de ſes extrémités, ou être entiérement inacceſſible, ce problême a deux cas.

PREMIER CAS.

124. Lorſque la diſtance inacceſſible AB * que l'on veut meſurer, eſt acceſſible par l'une de ſes extrémités; par exemple, par ſon extrémité A. Fig. 62.

On fait planter un piquet à un point quelconque C, auquel on puiſſe aller directement du point A. On poſe un graphometre au point A. On dirige l'une des regles de cet inſtrument vers le point B, & l'autre

vers le point C; afin d'avoir la grandeur de l'angle A, formé par les rayons visuels AB & AC. On ôte ensuite le graphometre du point A, & l'on fait mettre un piquet à sa place. On mesure la distance du point A au point C. On fait ôter le piquet du point C, & l'on y place le graphometre. Enfin, on dirige l'une des regles de cet instrument au point A, & l'autre au point B; afin d'avoir la grandeur de l'angle C, formé par les rayons visuels CA & CB.

On fait ensuite une échelle G proportionnée à la grandeur que l'on veut donner au plan du triangle ABC. On tire une ligne droite DF qui contienne autant de parties de cette échelle, que la distance AC contient de fois la mesure dont on s'est servi pour la mesurer. On décrit † sur cette ligne un angle D, qui ait le point D pour sommet, & soit égal à l'angle A. On fait encore sur cette même ligne un angle F, qui ait le point F pour sommet, & soit égal à l'angle C. Enfin, on prolonge, s'il est nécessaire, les côtés DE & FE de ces angles, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent à un point E; & l'on a un triangle DEF, dont le côté DE contient autant de parties de

† Pour décrire ces angles sur le papier, on se sert ordinairement d'un instrument que l'on nomme un *Rapporteur.*

l'échelle G, que la distance AB contient de fois la mesure dont on s'est servi pour mesurer la distance AC; comme on le démontre par la quatrieme proposition du sixieme Livre.

SECOND CAS.

125. Lorsque la distance AB * que l'on veut mesurer, est entiérement inaccessible. Fig. 63.

On choisit dans la campagne deux points C & H, qui soient tels que l'on puisse aller directement de l'un à l'autre, & voir de chacun les extrémités A & B de la distance proposée. On fait mettre un piquet au point H, & un graphometre au point C. Avec cet instrument placé au point C, on prend la grandeur des angles ACH & BCH formés par les rayons visuels tirés du point C aux points A, B & H. On ôte le graphometre du point C, & l'on fait mettre un piquet à la place. On mesure la distance du point C au point H. On fait porter le graphometre à la place du piquet H. Enfin, avec cet instrument placé à ce dernier point, on prend la grandeur des angles BHC & AHC formés par les rayons visuels tirés du point H aux points B, A & C.

On fait ensuite une échelle G proportionnée à la grandeur que l'on veut donner au plan du quadrilatere ABHC. On tire

une ligne droite FI, qui contienne autant de parties de cette échelle, que la distance CH contient de fois la mesure dont on s'est servi pour la mesurer. On décrit sur cette ligne des angles DFI & EFI, qui aient chacun le point F pour sommet, & soient égaux l'un à l'angle ACH, & l'autre à l'angle BCH. On fait encore sur cette même ligne des angles EIF & DIF, qui aient chacun le point I pour sommet, & soient égaux l'un à l'angle BHC, & l'autre à l'angle AHC. On prolonge, s'il est nécessaire, les côtés de ces angles, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent les uns à un point D, & les autres à un point E. Enfin, on tire du point D au point E, une ligne droite DE. Or, cette ligne contient autant de parties de l'échelle G, que la distance AB contient de fois la mesure dont on s'est servi pour mesurer la distance CH; comme on le démontre par les quatrieme & sixieme propositions du sixieme Livre.

Voici les raisons des opérations que l'on vient de prescrire dans ce second cas.

Premiérement. *Dans le triangle ACB, formé par la distance proposée AB, & par les rayons visuels CA & CB, on ne peut observer que l'angle ACB. Ainsi, on le mesure* †,

† Dans la pratique, nous n'avons point fait observer immédiatement l'angle ACB; parce que sa grandeur est déterminée par celle des angles ACH & BCH.

afin de construire un angle DFE de même grandeur.

Secondement. *Le rayon visuel CA est une distance accessible par son extrémité C. Ainsi, conformément à ce qui a été dit dans le premier cas* (n), *on prend un point H;* N. 124.
& l'on mesure la grandeur des angles ACH & AHC, afin de construire un triangle FDI, dont le côté FD contienne autant de parties d'une échelle G, que la distance CA contient de fois la mesure qui a servi à mesurer la distance CH.

Troisiémement. *Enfin le rayon visuel CB est aussi une distance accessible par son extrémité C. Ainsi, par le même principe, on prend un point H; & l'on mesure la grandeur des angles BCH & BHC, afin de construire encore un triangle FEI, dont le côté FE contienne aussi autant de parties de cette échelle G, que la distance CB contient de fois la mesure qui a servi à mesurer la distance CH.*

Or, par ce moyen, on parvient à construire un triangle DFE, dont le côté DE contient autant de parties de l'échelle G, que le côté AB du triangle ABC, c'est-à-dire la distance proposée, contient de fois la mesure dont on s'est servi pour mesurer la distance CH; comme on le démontre par la sixieme proposition du sixieme Livre.

PROPOSITION XXVII.

THÉORÊME.

126. *Si deux lignes droites étant coupées par une troisieme, les angles alternes † sont égaux, ces deux lignes sont paralleles.*

Fig. 64. Si les angles alternes, par exemple AEF* DFE, sont égaux, les lignes droites AB & CD sont paralleles.

Const. Prenez sur la ligne AB un point
N. 81. G, à volonté. Prenez ensuite (n) sur la ligne CD, prolongée s'il est nécessaire, & de l'autre côté de la ligne EF, par rapport au point G, la partie FH égale à la partie EG. Enfin, tirez du point G au point F, & du point E au point H, les lignes droites GF & EH.

Démonst. Dans les triangles GEF & HFE, l'angle AEF est égal [H] à l'angle DFE, le côté EG au côté FH [C], & le
N. 82. côté EF est commun. Ainsi (n), le côté GF

† On appelle *angles alternes*, deux des angles intérieurs ou deux des angles extérieurs, qui sont formés par une ligne qui en coupe deux autres; & qui sont pris l'un d'un côté de cette ligne coupante, & l'autre de l'autre côté de cette même ligne.

eſt égal au côté EH ; & par conſéquent les points G & E de la ligne AB, ſont également éloignés des points F & H de la ligne CD, qui leur correſpondent [c].

Or, la même démonſtration ſubſiſte, à quelque point † de la ligne AB que l'on prenne le point G. Donc tous les points de la ligne AB ſont également éloignés de tous les points correſpondans de la ligne CD. Par conſéquent (n), ces N. 55. deux lignes ſont paralleles.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

127. Il ſuit de ce théorême, que *les côtés oppoſés du quarré, du quarré long, du rhombe & du rhomboïde, ſont paralleles.*

Dans le quarré A*, le quarré long B, Fig. 65. le rhombe C, & le rhomboïde D, les côtés HG & EF ſont paralleles ; & les côtés HE & GF le ſont auſſi.

† Si l'on prenoit le point G ſur la partie EB, & par conſéquent le point H ſur la partie CF, les angles compris par les côtés égaux des triangles de la démonſtration, n'en ſeroient pas moins égaux ; puiſqu'ils ſeroient les ſupplémens des angles AEF & DFE qui ſont donnés égaux. Ainſi l'on a raiſon de dire, que *la même démonſtration ſubſiſte, à quelque point, &c.*

Conſt. Tirez la diagonale EG de chacune de ces figures.

Démonſt. Dans les triangles EHG &
N. 50, 51, 52, 53. EFG, le côté HE eſt (n) égal au côté GF, le côté HG au côté EF, & le côté
N. 88. EG eſt commun. Ainſi (n), l'angle HGE eſt égal à l'angle FEG, & l'angle HEG à l'angle FGE.

Or, puiſque les angles HGE & FEG qui ſont alternes, ſont égaux, les côtés
N. 126. HG & EF ſont paralleles (n) : & puiſque les angles HEG & FGE qui ſont auſſi alternes, ſont auſſi égaux, les côtés HE
N. 126. & GF ſont auſſi paralleles (n).

Donc, C. Q. F. D.



PROPOSITION XXVIII.

THÉORÊME.

128. *Si deux lignes droites étant coupées par une troisieme, l'un quelconque des angles extérieurs est égal à l'intérieur qui lui est opposé, ces deux lignes sont paralleles.*

Il en est de même, *si la somme de deux quelconques des angles intérieurs pris chacun du même côté de la ligne coupante, est égale à celle de deux angles droits.*

PREMIÉREMENT. Si l'angle extérieur, par exemple BGE*, est égal à l'angle in- Fig. 66.
térieur DHE qui lui est opposé, les lignes droites AB & CD sont paralleles.

Démonst. L'angle AGF est égal (n) à N. 101.
l'angle BGE qui lui est opposé au sommet; & [H] l'angle BGE est égal à l'angle DHE. Ainsi (n), l'angle AGF est égal à N. 62.
l'angle DHE.

Or (n), puisque les angles AGF & N. 126.
DHE qui sont alternes, sont égaux, les lignes AB & CD sont paralleles.

Par conséquent, C. Q. F. 1° D.

SECONDEMENT. Si la ſomme des deux
Fig. 66. angles intérieurs, par exemple BGF * & DHE, eſt égale à celle de deux angles droits, les lignes droites AB & CD ſont paralleles.

Démonſt. La ſomme des angles AGF
Fig. 97. & BGF eſt égale (n) à celle de deux angles droits; & [H] celle des angles BGF
N. 61. & DHE l'eſt auſſi. Ainſi (n), la ſomme des angles AGF & BGF eſt égale à celle des angles BGF & DHE. Par conſéquent, ſi l'on retranche le même angle BGF de chacune de ces deux ſommes, les reſtes qui ſeront les angles AGF &
N. 64. DHE, ſeront égaux (n).
N. 126. Or (n), puiſque les angles AGF & DHE qui ſont alternes, ſont égaux, les lignes AB & CD ſont paralleles.

Par conſéquent, C. Q. F. 2° D.

COROLLAIRE.

129. Il ſuit de ce théorême, que *ſi deux lignes droites ſont perpendiculaires chacune à une même ligne droite, elles ſont paralleles.*



PROPOSITION XXIX.

THÉORÊME.

130. *Si deux lignes droites & paralleles ſont coupées par une troiſieme ligne droite, les angles alternes ſont égaux; chaque angle extérieur eſt égal à l'intérieur qui lui eſt oppoſé; & la ſomme de deux quelconques des intérieurs pris chacun du même côté de la ligne coupante, eſt égale à celle de deux angles droits.*

PREMIÉREMENT. Si les lignes droites AB* & CD ſont paralleles, les angles alternes, par exemple AIF & DKE, ſont égaux. Fig. 67.

Conſt. Prenez ſur la ligne AB un point G à volonté. Prenez enſuite (n) ſur la ligne CD, prolongée s'il eſt néceſſaire, & de l'autre côté de la ligne EF par rapport au point G, la partie KH égale à la partie IG. Enfin, tirez du point G au point K, & du point I au point H, les lignes droites GK & IH. N. 81.

Démonſt. Dans les triangles GIK & HKI, le côté IK eſt commun: le côté IG eſt égal [c] au côté KH: & le côté

GK l'eſt au côté IH; puiſque les points G & I, K & H, étant [C] des points correſpondans des deux lignes AB & CD qui ſont paralleles [H], la diſtance du
N. 55. point G au point K eſt égale (n) à celle
N. 88. du point I au point H. Ainſi (n), l'angle AIF eſt égal à l'angle DKE.

Par conſéquent, C. Q. F. 1° D.

SECONDEMENT. L'angle extérieur, par exemple BIE, eſt égal à l'intérieur DKE qui lui eſt oppoſé.

N. 101. *Démonſt.* L'angle BIE eſt égal (n) à l'angle AIF qui lui eſt oppoſé au ſommet; & l'angle AIF eſt égal [D] à ſon alterne DKE, puiſque [H] les lignes AB & CD
N. 62. ſont paralleles. Donc (n), l'angle BIE eſt égal à l'angle DKE.

Par conſéquent, C. Q. F. 2° D.

TROISIÉMEMENT. Enfin, la ſomme des angles intérieurs, par exemple BIF & DKE, eſt égale à celle de deux angles droits.

Démonſt. La ſomme des angles BIF &
N. 97. BIE eſt égale (n) à celle de deux angles droits. Or, puiſque [H] les lignes AB & CD ſont paralleles, l'angle BIE qui eſt extérieur, eſt égal [D] à l'intérieur DKE

qui lui eſt oppoſé. Donc (n), la ſomme des angles BIF & DKE eſt égale à celle de deux angles droits. N. 61.

Par conſéquent, C. Q. F. 3° D.

COROLLAIRE.

131. Il ſuit de la premiere partie de ce théorême, que *ſi une ligne droite eſt perpendiculaire à l'une quelconque de deux lignes droites qui ſont paralleles, elle eſt auſſi perpendiculaire à l'autre :* & de la ſeconde partie de ce même théorême, que *ſi de deux lignes droites paralleles, l'une eſt perpendiculaire à une troiſieme ligne droite, l'autre l'eſt auſſi.*

PROPOSITION XXX.

THÉORÊME.

132. *Si deux lignes droites ſont paralleles chacune à une même ligne, elles le ſont auſſi entr'elles.*

Si les lignes droites AB* & CD ſont paralleles chacune à une même ligne EF, elles le ſont auſſi entr'elles. Fig. 68.

Conſt. Tirez une ligne droite quelconque GH, qui coupe les lignes AB,

EF & CD, prolongées s'il eſt néceſſaire.
N. 130. *Démonſt.* L'angle AIH eſt égal (n) à ſon alterne FKG, puiſque [H] les lignes AB & EF ſont paralleles; l'angle FKG
N. 101. eſt égal (n) à l'angle EKH qui lui eſt oppoſé au ſommet; enfin, l'angle EKH eſt
N. 130. auſſi égal (n) à ſon alterne DLG, puiſque [H] les lignes EF & CD ſont auſſi paral-
N. 62. leles. Donc (n), l'angle AIH eſt égal à l'angle DLG.

Or, puiſque les angles AIH & DLG qui ſont alternes, ſont égaux, les lignes AB
N. 126. & CD ſont paralleles (n).

Par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXI.

PROBLÊME.

133. *D'un point donné hors d'une ligne droite, tirer une parallele à cette ligne.*

Fig. 69. IL faut tirer du point F* une parallele à la ligne droite AB.

Conſt. Tirez du point F à un point quelconque E de la ligne AB, une ligne
N. 119. droite FE. Décrivez enſuite (n) ſur cette ligne FE un angle DFE, qui ayant le point F pour ſommet, ſoit égal & alterne

à l'angle AEF. Le côté FD de cet angle, prolongé s'il eſt néceſſaire, ſera la parallele demandée.

Démonſt. Les angles alternes DFE & AEF ſont égaux [c]. Donc (n), les lignes AB & CFD ſont paralleles. N. 126.

Par conſéquent, C. Q. F. F.

USAGE.

134. *On peut ſe ſervir de cette propoſition, de la maniere ſuivante, pour tirer par un point quelconque F* une parallele à une ligne droite inacceſſible AB.* Fig. 70.

On choiſit ſur cette ligne deux points quelconques H & G que l'on puiſſe reconnoître. On poſe enſuite un graphometre au point F; & après y avoir fait (n) *toutes les mêmes opérations que ſi l'on vouloit meſurer la diſtance inacceſſible HG, on rapporte ſur le papier le triangle HFG, de la même maniere dont on a rapporté en DFE le triangle ACB de la figure 63.* N. 125.

Lorſque l'on eſt parvenu à avoir ſur le papier le triangle HFG, on y prend avec un rapporteur la grandeur de l'angle HGF. On dirige enſuite l'une des regles du graphometre au point G; & l'on fait tourner l'autre vers D, juſqu'à ce qu'elle forme avec la premiere un angle DFG égal à cet angle HGF. Enfin, on fait planter un piquet D

dans la direction de cette derniere regle ; & par ce moyen, on a deux points F & D de la parallele demandée. Ainsi, si l'on fait passer par ces deux points une ligne droite CFD, elle sera cette parallele.

PROPOSITION XXXII.

THÉORÊME.

135. *L'angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des deux angles intérieurs de ce même triangle, qui sont opposés à cet angle.*

Fig. 71. L'ANGLE extérieur BCD* du triangle ABC, est égal à la somme des angles intérieurs B & A qui lui sont opposés.

N. 133. *Const.* Du point C tirez (n) la parallele CE au côté AB.

N. 72. *Démonst.* L'angle BCD est (n) la somme des angles BCE & ECD. Mais, puisque [C] les lignes AB & CE sont paralleles,
N. 130. ces angles BCE & ECD sont (n) égaux, l'un à son alterne B, & l'autre à
N. 62. l'intérieur A qui lui est opposé. Donc (n), l'angle BCD est égal à la somme des angles B & A.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

136. Il ſuit de ce théorême, que *la ſomme de tous les angles d'un triangle, eſt égale à celle de deux angles droits.*

Dans le triangle ABC *, la ſomme de tous les angles BCA, B & A eſt égale à celle de deux angles droits. Fig. 71.

Conſt. Prolongez le côté AC vers D, à volonté.

Démonſt. La ſomme des angles BCA & BCD eſt égale (n) à celle de deux angles droits. Mais (n), l'angle BCD qui eſt extérieur au triangle ABC, eſt égal à la ſomme des angles intérieurs B & A qui lui ſont oppoſés. Donc (n), la ſomme des angles BCA, B & A eſt égale à celle de deux angles droits. N. 97. N. 135. N. 62.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

137. Il ſuit de ce corollaire, que *ſi la ſomme de deux angles quelconques d'un triangle, eſt égale à celle de deux angles quelconques d'un autre triangle; le troiſieme angle du premier triangle eſt égal au troiſieme angle du ſecond.*

Si dans les triangles ABC * & DEF, la ſomme des angles, par exemple A & Fig. 72.

C, eſt égale à celle des angles, par exemple D & F; l'angle B eſt égal à l'angle E.

Démonſt. La ſomme des angles A, B
N. 62. & C, eſt égale (n) à celle des angles D,
N. 136. E & F; puiſque (n) elles valent chacune deux angles droits: & la ſomme des angles A & C eſt égale [H] à celles des angles D & F. Ainſi, ſi l'on retranche la troiſieme ſomme de la premiere, & la quatrieme de la ſeconde, les reſtes ſeront
N. 64 égaux (n).

Or, ces reſtes ſont l'angle B & l'angle E. Donc l'angle B eſt égal à l'angle E. Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

138. Il ſuit auſſi de ce premier corollaire, que *ſi dans un triangle iſoſcele, l'angle formé par les côtés égaux eſt un angle droit, les autres angles ſont chacun la moitié d'un angle droit.*

Fig. 73. Si dans le triangle iſoſcele ABC * l'angle A eſt droit, les angles B & C ſont chacun la moitié d'un angle droit.

Démonſt. La ſomme des angles A, B
N. 136. & C, eſt égale (n) à celle de deux angles droits. Ainſi, puiſque [H] l'angle A eſt droit, les angles B & C valent enſemble un angle droit; & par conſéquent chacun

vaut

vaut la moitié d'un angle droit, puiſque ils ſont égaux. (n) N 84.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE IV.

139. Il ſuit encore de ce même premier corollaire, que *dans un triangle équilatéral, chaque angle eſt les deux tiers d'un angle droit.*

Démonſt. Dans un triangle équilatéral, tous les angles ſont égaux (n). Ainſi, ils N. 85. ſont chacun le tiers de deux angles droits (n); & par conſéquent, les deux tiers d'un N. 136. angle droit.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE V.

140. Il ſuit enfin de ce même premier corollaire, que *la ſomme de tous les angles d'une figure rectiligne quelconque, eſt égale à celle de deux fois autant d'angles droits, moins quatre, que cette figure a d'angles, ou de côtés.*

La ſomme de tous les angles A*, B, C, Fig. 74. &c. par exemple du pentagone ABCDE, eſt égale à celle de deux fois cinq angles droits, moins quatre; c'eſt-à-dire à celle de ſix angles droits.

Conſt. Du point F pris à volonté dans

E

le polygone propoſé, tirez à chaque angle A, B, C, &c. les lignes droites FA, FB, FC, FD & FE.

Démonſt. Les lignes FA, FB, FC, &c. diviſent en cinq triangles AFB, BFC, CFD, &c. le polygone propoſé ; puiſque ce polygone a cinq côtés. Or, la ſomme de tous les angles de ces cinq triangles, eſt égale à celle de dix angles droits ; puiſque
N. 136. (n), la ſomme de tous les angles d'un triangle eſt égale à celle de deux angles droits.

Mais la ſomme de tous les angles de ces cinq triangles, ſurpaſſe celle de tous les angles A, B, C, &c. du polygone propoſé, de la ſomme de tous les angles dont le ſommet eſt au point F, laquelle
N. 98. eſt égale (n) à celle de quatre angles droits.

Donc, ſi de la ſomme de dix angles droits, on retranche celle de quatre angles droits, le reſte qui eſt la ſomme de ſix angles droits, eſt auſſi celle de tous les angles A, B, C, &c. du polygone propoſé.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

USAGE.

141. *Lorſque l'on connoît dans un triangle la valeur de deux angles quelconques,*

il eſt facile de trouver celle du troiſieme; puiſque (n) *cette derniere valeur eſt toujours* N. 136.
la différence de la premiere, à la ſomme de deux angles droits, c'eſt-à-dire (n), *à* 180 N. 38.
degrés.

Ainſi, ſi l'on ſçait que dans le triangle ABC l'angle A eſt, par exemple, de* 50 Fig. 75
degrés, & l'angle C de 75; *on en conclut que l'angle B eſt de* 55.

PROPOSITION XXXIII.

THÉORÊME.

142. *Si dans un quadrilatere deux côtés ſont égaux & paralleles, les deux autres le ſont auſſi.*

Si dans le quadrilatere DB * les côtés Fig. 76.
AB & DC ſont égaux & paralleles, les côtés AD & BC le ſont auſſi.

Conſt. Tirez la diagonale AC.

Démonſt. Dans les triangles ABC & CDA, l'angle BAC eſt égal (n) à ſon al- N. 130.
terne DCA, puiſque [H] les côtés AB & DC ſont paralleles; ces deux mêmes côtés ſont égaux [H]; & le côté AC eſt commun. Ainſi (n), le côté AD eſt égal au N. 82.
côté BC; & l'angle DAC à l'angle BCA.

Or, puiſque l'angle DAC eſt égal à l'angle BCA qui lui eſt alterne, ce même côté AD que nous venons de conclure
N. 126. égal au côté BC, lui eſt auſſi parallele (n).

Par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXIV.

THÉORÊME.

143. *Dans un parallélogramme, les côtés oppoſés ſont égaux; les angles oppoſés le ſont auſſi; & la diagonale le diviſe en deux parties égales.*

PREMIÉREMENT. Dans le parallé-
Fig. 76. logramme DB * le côté AB eſt égal au côté DC, & le côté AD au côté BC.

Conſt. Tirez la diagonale AC.

Démonſt. Dans les triangles ABC & CDA, le côté AC eſt commun; l'angle
N. 130. BAC eſt égal (n) à ſon alterne DCA,
N. 57. puiſque (n) les côtés AB & DC ſont pa-
N. 130. ralleles; & l'angle BCA eſt auſſi égal (n)
N. 57. à ſon alterne DAC, puiſque (n) les côtés AD & BC ſont auſſi paralleles. Donc, le côté AB eſt égal au côté DC, & le
N. 123. côté AD au côté BC (n).

Par conſéquent, C. Q. F. 1° D.

SECONDEMENT, l'angle DAB eſt égal à l'angle DCB ; & l'angle B à l'angle D.

Démonſt. Les angles DAC & BAC ſont égaux aux angles BCA & DCA, chacun à chacun [D]. Or, l'angle DAB eſt la ſomme des deux premiers ; & l'angle DCB eſt celle des deux derniers. Donc (n), N. 62.
l'angle DAB eſt égal à l'angle DCB.

Et dans les triangles ABC & CDA, le côté AC eſt commun, l'angle BAC eſt égal à l'angle DCA [D], & l'angle BCA à l'angle DAC [D]. Donc (n), l'angle B N. 123.
eſt égal à l'angle D.

Par conſéquent, C. Q. F. 2° D.

TROISIÉMEMENT. Enfin, la diagonale AC diviſe le parallélogramme DB en deux parties égales ABC & CDA.

Démonſt. Dans les triangles ABC & CDA, le côté AC eſt, &c. Donc (n) le N. 123.
triangle ABC eſt égal au triangle CDA.

Par conſéquent, C. Q. F. 3° D.

COROLLAIRE I.

144. Il ſuit de la premiere partie de ce théorême, que *ſi dans un parallélogramme deux côtés de ſuite ſont égaux, tous les côtés ſont égaux.*

Si dans le parallélogramme C * les cô- Fig. 65.
tés de ſuite, par exemple EF & EH,

ſont égaux, tous les côtés HG, EF, EH & FG ſont égaux.

N. 143. *Démonſt.* Le côté HG eſt égal (n) au côté EF qui lui eſt oppoſé; le côté EF eſt égal [H] au côté EH; & le côté EH l'eſt
N. 142. (n) au côté FG qui lui eſt oppoſé. Donc
N. 62. tous les côtés ſont égaux (n).

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

145. Il ſuit de la ſeconde partie de ce même théorême, que *ſi dans un parallélogramme un angle eſt droit, ce parallélogramme eſt rectangle.*

Fig. 65. Si dans le parallélogramme B* l'angle, par exemple E, eſt un angle droit, ce parallélogramme eſt rectangle.

Démonſt. La ſomme des angles E, F, G & H eſt égale à celle de quatre angles
N. 140. droits (n). Or, l'angle E eſt droit [H];
N. 143. & l'angle G l'eſt auſſi (n), puiſqu'il eſt oppoſé à l'angle E. Donc la ſomme des deux autres angles H & F eſt égale à celle
N. 143. de deux angles droits. Mais (n), ces deux autres angles ſont égaux, puiſqu'ils ſont oppoſés. Donc ils ſont chacun un angle droit. Ainſi, tous les angles du parallélogramme B ſont des angles droits. Par con-

ſéquent (n), ce parallélogramme eſt rec- N. 58.
tangle.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

146. Il ſuit enfin de ces deux corollaires, que *ſi un parallélogramme a deux côtés de ſuite égaux, & un angle droit, ce parallélogramme eſt quarré.*

Si dans le parallélogramme A * les cô- Fig. 65.
tés de ſuite, par exemple HG & HE, ſont égaux; & ſi l'angle, par exemple H, eſt un angle droit, ce parallélogramme eſt quarré.

Démonſt. Dans le parallélogramme A, tous les côtés HG, GF, HE & EF, ſont
égaux (n); puiſque [H] les deux de ſuite N. 144.
HG & HE le ſont: & tous les angles H,
G, F & E ſont droits (n), puiſque [H] N. 145.
l'angle H eſt droit. Ainſi (n), ce parallé- N. 50.
logramme eſt quarré.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

On peut encore tirer pluſieurs conſéquences de ce même théorême, par exemple celle-ci:

Lorſque deux parallélogrammes ont un angle égal à un angle, ils ſont équiangles.

Mais il eſt ſi facile & de les appercevoir & de les démontrer, qu'il eſt inutile d'en parler ici.

PROPOSITION XXXV.

THÉORÊME.

147. *Les parallélogrammes qui ſont ſur une même* baſe †, *& entre les mêmes paralleles, ont des ſurfaces égales.*

Fig. 77. LES parallélogrammes DB * & DF, qui ſont ſur la même baſe DC, & entre les mêmes paralleles DC & AF, ſont égaux.

Démonſt. Dans les triangles DAE &
N. 143. CBF, le côté DA eſt égal (n) au côté CB, puiſque [H] le quadrilatere DB eſt parallélogramme. Par la même raiſon, l'angle
N. 130. intérieur DAE eſt égal (n) à l'extérieur CBF auquel il eſt oppoſé. Enfin, l'angle
N. 130. extérieur DEA eſt auſſi égal (n) à l'intérieur CFB qui lui eſt oppoſé, puiſque [H] le quadrilatere DF eſt auſſi parallélo-
Fig. 123. gramme. Donc (n), le triangle DAE eſt égal au triangle CBF.

Par conſéquent, ſi l'on retranche de chacun le même triangle GBE, les reſtes

† On appelle *Baſe* d'une figure, le côté ſur lequel on ſuppoſe que cette figure eſt poſée. Par conſéquent, la *Hauteur* d'une figure, eſt la perpendiculaire abaiſſée du ſommet de cette figure à ſa baſe.

qui ſont les trapezes GA & GF, ſeront égaux (n). Mais puiſque le trapeze GA N. 64.
eſt égal au trapeze GF, ſi l'on ajoute à chacun le même triangle DGC, les ſommes ſeront égales (n). N. 63.

Or, ces ſommes ſeront les parallélogrammes DB & DF. Donc ces parallélogrammes ſont égaux.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

SCHOLIE I.

148. *Comme le meſurage des ſurfaces dépend primitivement de ce théorême, nous allons enſeigner ce que l'on entend par* Meſure ; *& la maniere de ſe ſervir des meſures.*

DES MESURES.

On appelle Meſure, *une certaine étendue dont les hommes ſont convenus entre eux, pour leur ſervir de terme auquel ils puiſſent comparer les autres étendues ; & juger de leur grandeur, par le nombre qu'elles contiendront de parties, égales chacune à cette premiere étendue. Or, comme chaque partie d'une étendue ne peut être égale qu'à une étendue de même genre qu'elle, ils ont été obligés* (n) *de convenir de trois ſortes de* N. 1.
meſures : ſavoir, de meſures linéaires, pour

leur comparer les lignes; de mesures superficielles, pour leur comparer les surfaces; & de mesures solides, pour leur comparer les corps.

Les premieres, qui sont des lignes droites, se nomment mesures courantes; *les autres se nomment* mesures quarrées, *parce qu'elles sont des quarrés* †; *& les dernieres s'appellent* mesures cubiques, *parce qu'elles sont des cubes* ¶.

Du Mesurage, ou de la maniere de se servir des Mesures.

On appelle mesurer, *considérer combien une étendue contient de parties égales chacune à l'étendue que l'on a prise pour mesure.*

Ainsi, mesurer *une longueur, c'est examiner combien cette longueur contient de parties, égales chacune à la ligne droite que l'on a prise pour mesure:* mesurer *une surface, c'est examiner combien cette surface*

† On a pris un quarré pour être la mesure des surfaces; parce que la longueur & la largeur d'un quarré étant égales, cette figure mesure également & en même temps les deux dimensions de la surface.

¶ Le *Cube* est un corps qui a la figure d'un dez à jouer. On l'a pris pour être la mesure des corps; parce que sa longueur, sa largeur & son épaisseur étant égales, il mesure également & en même temps les trois dimensions des corps.

contient de quarrés, égaux chacun à celui que l'on a pris pour meſure : enfin, meſurer *un ſolide, c'eſt examiner combien ce ſolide contient de cubes, égaux chacun à celui que l'on a pris pour meſure. Donc :*

Premiérement. *Pour* meſurer *une ligne droite, on applique ſucceſſivement ſur cette ligne celle que l'on a priſe pour meſure. Or, autant de fois que l'on peut l'y appliquer, autant de fois elle y eſt contenue; puiſque cette même ligne que l'on veut meſurer, pourroit être diviſée en autant de parties égales chacune à cette meſure, que cette même meſure peut lui être appliquée de fois.*

Mais il faut obſerver, que ſi la longueur que l'on veut meſurer eſt une ligne courbe, il n'eſt point poſſible de lui appliquer une ligne droite. Par conſéquent, on ne peut meſurer immédiatement que les ſeules lignes droites.

Secondement. *Pour* meſurer *un rectangle, il faudroit lui appliquer ſucceſſivement le quarré que l'on auroit pris pour meſure : & autant de fois que l'on pourroit le lui appliquer, autant de fois ce rectangle contiendroit cette meſure; puiſque l'on pourroit le diviſer en autant de parties égales chacune à cette meſure, que cette même meſure pourroit lui être appliquée de fois. Mais il n'eſt*

point praticable de porter facilement une ſurface quarrée, ni de l'appliquer ſucceſſivement ſur toute celle d'un rectangle. Ainſi, il faut réſoudre ce problême, ſans ſe ſervir d'une ſurface pour meſure actuelle. Or, voici la maniere de le faire.

Fig. 78. Soit le quarré M *, avec lequel il faut meſurer la ſurface du rectangle DB.

On prend une meſure courante, égale au côté NO du quarré M; & l'on conſidere combien la baſe DC du rectangle propoſé contient de parties égales chacune à cette meſure courante; & combien la hauteur DA en contient auſſi. Or, ſi la baſe DC contient, par exemple, trois de ces parties, il eſt évident que le rectangle DB pourroit être diviſé en trois autres rectangles DE, FG & HB, qui auroient chacun une baſe égale à celle de la meſure M. Et ſi la hauteur DA contient, par exemple, quatre de ces mêmes parties, il eſt encore évident que chacun des rectangles DE, FG, &c. pourroit être ſubdiviſé en quatre autres, DL, IP, &c. qui auroient auſſi chacun la même hauteur que la meſure M. Ainſi, tout le rectangle DB pourroit être diviſé en trois fois quatre, ou douze quarrés, égaux chacun à la meſure M; & contient par conſéquent douze parties égales chacune à cette meſure.

Pareillement, ſi la meſure courante NO

ſe trouvoit, par exemple quatre fois $\frac{1}{2}$ dans la baſe d'un rectangle, & ſix fois $\frac{1}{3}$ dans la hauteur; on verroit, (en tirant des paralleles aux côtés par chaque point de diviſion) que ce rectangle contiendroit 28 parties égales chacune à la meſure M, plus une partie égale à la moitié de cette même meſure. Car ce rectangle ſeroit alors compoſé, 1° d'un rectangle qui contiendroit 24 de ces parties; 2° d'un rectangle qui en contiendroit $\frac{6}{2}$, ou 3; 3° d'un rectangle qui en contiendroit $\frac{3}{3}$ ou 1; 4° enfin, d'un rectangle qui en contiendroit $\frac{3}{2}$ tiers, ou $\frac{1}{2}$.

D'où l'on conclut cette regle générale du meſurage des rectangles.

149. La ſurface d'un rectangle eſt égale au produit du nombre des meſures courantes qui ſont contenues dans ſa longueur, multiplié par le nombre des mêmes meſures qui ſe trouvent dans ſa largeur: *ou, pour nous ſervir de l'expreſſion ordinaire*, un rectangle eſt égal au produit de ſa baſe multipliée par ſa hauteur.

Troiſiémement. *Il faut auſſi obſerver, que ſi tous les angles de la ſurface que l'on veut meſurer ne ſont pas des angles droits, il n'eſt pas poſſible de la diviſer en quarrés. Par conſéquent, on ne peut auſſi meſurer immédiatement que les ſeuls rectangles.*

Nous ne parlerons qu'au onzieme Livre, de la maniere de mesurer les parallélépipedes *rectangles* †.

COROLLAIRE I.

150. Il suit du théorême qui précede cette scholie, que *la surface d'un parallélogramme quelconque, est égale à celle d'un rectangle qui auroit pour base l'un des côtés de ce parallélogramme; & pour hauteur, une perpendiculaire tirée de ce côté, à un point quelconque du côté qui lui est opposé, prolongé s'il est nécessaire.*

Fig. 79. Le parallélogramme DB * est égal à un rectangle qui auroit pour base, par exemple, le côté DC de ce parallélogramme; & pour hauteur, une perpendiculaire tirée d'un point quelconque C de ce même côté, au côté opposé AB, prolongé s'il est nécessaire.

N. 96. *Const.* Du point C, abaissez (n) la perpendiculaire CF au côté AB, prolongé
N. 81. autant qu'il le sera nécessaire. Prenez (n) sur la ligne BF prolongée vers E, la partie EF égale au côté DC. Enfin, tirez du point D au point E, la ligne droite DE ¶.

† Voyez-en la définition au sixieme Livre.

¶ On se sert de cette construction, pour faire un rectangle DF égal à un parallélogramme quelconque DB.

Démonst. Le côté EF est égal [c] & parallele [H] au côté DC. Ainsi (n), le N. 142.
quadrilatere DF est un parallélogramme; & par conséquent un rectangle (n), puis- N. 145.
que [c] il a un angle droit F. Or (n), le N. 147.
parallélogramme DB & ce rectangle sont égaux; puisque [c] ils sont sur la même base DC, & entre les mêmes paralleles DC & EB.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

151. Il suit du corollaire précédent, & du n° 149, que *la surface d'un parallélogramme quelconque, est égale au produit de la base de ce parallélogramme multipliée par sa hauteur.*

Le parallélogramme DB * est égal au Fig. 79.
produit de sa base DC multipliée par sa hauteur.

Const. La même que la précédente.

Démonst. Le parallélogramme DB est égal au rectangle DF (n). Or, le rectan- N. 150.
gle DF est égal (n) au produit de sa base N. 149.
DC multipliée par sa hauteur CF. Donc (n), le parallélogramme DB est aussi égal N. 62.
au produit de la base DC multipliée par la hauteur CF.

Mais cette base DC & cette hauteur

CF ſont auſſi, l'une la baſe, & l'autre la hauteur du parallélogramme DB. Donc ce parallélogramme eſt égal au produit de ſa baſe multipliée par ſa hauteur.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

SCHOLIE II.

152. *Il eſt à propos de remarquer ici, que l'on dérive ſouvent du nom de la meſure, le verbe qui exprime l'action de s'en ſervir. Par exemple, du nom générique* meſure, *on dérive le verbe* meſurer. *Du nom générique ligne* droite, (*en latin* recta,) *qui eſt la meſure de toutes les longueurs; on dérive le verbe* rectifier, *qui exprime l'action de meſurer toutes ſortes de lignes. Du nom générique* quarré, *qui eſt celui de la meſure de toutes les ſurfaces; on dérive le verbe* quarrer, *qui exprime l'action de meſurer toutes ſortes de ſurfaces. Enfin, du nom générique* cube, *qui eſt celui de la meſure de tous les corps; on dérive le verbe* cuber, *qui exprime l'action de meſurer toutes ſortes de ſolides. Ainſi, l'on dit* rectifier *une ligne*, quarrer *une ſurface*, cuber *un ſolide; pour exprimer l'action de meſurer ces différentes étendues. C'eſt pareillement des noms particuliers*, toiſe, aune, arpent, *&c. que dérivent les verbes*, toiſer, auner, arpenter, *&c.*

PROPOSITION XXXVI.

THÉORÊME.

153. *Les parallélogrammes qui ſont ſur des baſes égales, & entre les mêmes paralleles, ont des ſurfaces égales.*

LES parallélogrammes DB* & HF, qui ſont ſur les baſes égales DC & HG, & entre les mêmes paralleles DG & AF, ſont égaux. Fig. 80.

Conſt. Tirez du point D au point E, la ligne droite DE ; & du point C au point F la ligne droite CF.

Démonſt. Le côté DC eſt égal [H] au côté HG, & le côté HG au côté EF (n). N. 143.
Ainſi (n), les côtés DC & EF ſont égaux. N. 62.
Par conſéquent, puiſque [H] ils ſont auſſi paralleles, le quadrilatere DF eſt parallélogramme (n). N. 141.

Or, puiſque le quadrilatere DF eſt parallélogramme, il eſt égal (n) & au parallélogramme DB qui [C] eſt ſur la même baſe DC que lui, & entre les mêmes paralleles DG & AF; & au parallélogramme HF qui [C] eſt auſſi ſur la même baſe EF que lui, & encore entre les mêmes paral- N. 147.

N. 62. leles DG & AF. Donc (n), les parallélogrammes DB & HF ſont égaux.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXVII.

THÉORÊME.

154. *Les triangles qui ſont ſur une même baſe, & entre les mêmes paralleles, ont des ſurfaces égales.*

Fig. 81. LES triangles ABC * & ADC qui ſont ſur la même baſe AC, & entre les mêmes paralleles AC & BD, ſont égaux.

N. 133. *Conſt.* Tirez (n) du point A, la parallele AE au côté CB; & du point C, la parallele CF au côté AD. Prolongez enſuite la ligne BD, jusqu'à ce qu'elle rencontre en des points E & F, les paralleles AE & CF.

Démonſt. Les côtés AC & EB, AC & DF, ſont paralleles [H], chacun à chacun; & [C] les côtés AE & CB, CF & AD, le ſont auſſi, chacun à chacun.
N. 57. Ainſi (n), les quadrilateres CE & AF ſont parallélogrammes. Par conſéquent ils ſont
N. 147. égaux (n), puiſque [C] ils ſont ſur la

même baſe AC, & entre les mêmes paralleles AC & EF.

Mais (n) les triangles ABC & ADC ſont les moitiés, l'un du parallélogramme CE, & l'autre du parallélogramme AF. Donc (n) ces triangles ſont égaux.

N. 143.
N. 68.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

USAGE.

155. *On ſe ſert de ce théorême, de la maniere ſuivante; premiérement,* pour faire un triangle rectangle, qui ſoit égal à un triangle quelconque ABC*. Fig. 82.

Conſt. *On tire du point B* (n) *une parallele indéfinie BD au côté AC. Du point A, on éleve* (n) *la perpendiculaire AD à ce même côté. Enfin, on tire du point D au point C, la ligne droite DC; & l'on a un triangle ADC qui eſt le triangle demandé.*

N. 133.
N. 95.

Démonſt. *Premiérement, le triangle ADC eſt rectangle en A* [c]. *Secondement, il eſt égal au triangle ABC* (n); *puiſque* [c] *il eſt ſur la même baſe AC que cet autre triangle, & entre les mêmes paralleles AC & BD.* N. 154.

Donc, C. Q. F. F.

Secondement, pour faire un triangle qui ſoit égal à un autre triangle quelconque ABC*, & compris entre les deux lignes droites & paralleles AC & EF. Fig. 83 & 84.

Conſt. *Du point D, auquel l'un des côtés du triangle propoſé (par exemple le côté AB prolongé s'il eſt néceſſaire), rencontre la parallele EF, tirez au ſommet de l'angle C, la ligne droite DC. Du ſommet*

N. 133. *de l'angle B, tirez* (n) *la parallele BG à cette ligne DC. Enfin, du point G auquel cette parallele rencontre le côté AC prolongé s'il eſt néceſſaire, tirez au point D la ligne droite GD. Le triangle ADG, qui* [c] *eſt entre les paralleles AC & EF, ſera le triangle demandé.*

Fig. 83. Démonſt. 1° *Les triangles ADG* & ABC ont une partie commune ABG: &*

N. 154. *l'autre partie BDG du premier eſt égale* (n) *à l'autre partie BCG du ſecond: puiſque ces deux autres parties ſont des triangles, qui* [c] *ſont ſur la même baſe BG, & entre*

N. 63. *les mêmes paralleles BG & DC. Donc* (n) *les triangles ADG & ABC ſont égaux.*

Par conſéquent, C. Q. F. F.

Fig. 84. 2° *Les triangles ADG* & ABC ont une partie commune ADC: & l'autre partie DGC*

N. 154. *du premier eſt égale* (n) *à l'autre partie DBC du ſecond; puiſque ces deux autres parties ſont des triangles, qui* [c] *ſont ſur la même baſe DC, & entre les mêmes paralleles DC*

N. 63. *& BG. Donc* (n) *les triangles ADG & ABC ſont égaux.*

Par conſéquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION XXXVIII.

THÉORÊME.

156. *Les triangles qui ſont ſur des baſes égales, & entre les mêmes paralleles, ont des ſurfaces égales.*

LES triangles ABC* & DEF qui ſont ſur les baſes égales AC & DF, & entre les mêmes paralleles AF & GH, ſont égaux. Fig. 85.

Conſt. Tirez (n) du point A, la parallele AG au côté CB; & du point F, la parallele FH au côté DE. N. 133.

Démonſt. Les côtés AC & GB, DF & EH, ſont paralleles [H], chacun à chacun; & [C] les côtés AG & CB, FH & DE, le ſont auſſi, chacun à chacun. Ainſi (n), les quadrilateres GC & DH ſont parallélogrammes. Par conſéquent ils ſont égaux (n), puiſque [H] ils ſont ſur les baſes égales AC & DF, & entre les mêmes paralleles AF & GH. N. 57. N. 153.

Mais (n), les triangles ABC & DEF ſont les moitiés, l'un du parallélogramme GC, & l'autre du parallélogramme DH. Donc (n), ces triangles ſont égaux. N. 143. N. 68.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXIX.

THÉORÊME.

157. *Si des triangles qui ſont ſur une même baſe, ont des ſurfaces égales, ils ſont entre les mêmes paralleles.*

Fig. 86. SI les triangles ABC * & ADC qui ſont ſur la même baſe AC, ſont égaux, la ligne droite tirée du ſommet B de l'un au ſommet D de l'autre, eſt parallele à cette baſe.

Conſt. Prolongez le côté AD vers E, à volonté. Tirez du point B aux points E & F pris auſſi à volonté ſur la ligne AE, l'un au-deſſus du point D & l'autre au-deſſous, les lignes droites BE & BF. Enfin, tirez du point C aux mêmes points E & F, les lignes droites CE & CF.

Démonſt. Si la ligne BD n'étoit point parallele à la baſe AC, une ligne tirée du point B parallélement à cette baſe, paſſeroit ou au-deſſus de la ligne BD, ou au-deſſous.

Or, ſi elle paſſoit au-deſſus, & étoit, par exemple la ligne BE, les triangles
N. 154. AEC & ABC ſeroient égaux (n), puiſque [c] ils ſont ſur la même baſe AC, &

que [s] ils feroient entre les mêmes paralleles AC & BE. Mais [H], les triangles ABC & ADC font auffi égaux. Donc (n), N. 61.
le triangle AEC feroit égal au triangle ADC. Ce qui n'eft point, puifque le premier furpaffe le fecond du triangle CDE.

Et fi elle paffoit au-deffous, & étoit, par exemple la ligne BF; on démontreroit par un raifonnement pareil au précédent, que le triangle AFC feroit égal au triangle ADC. Ce qui n'eft point encore, puifque le premier differe du fecond du triangle CFD.

Donc la ligne BD eft parallele à la bafe AC.

Par conféquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION XL.

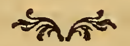
THÉORÊME.

158. *Si des triangles qui ſont ſur des baſes égales, & priſes chacune ſur une même ligne droite, ont des ſurfaces égales; ils ſont entre les mêmes paralleles.*

Fig. 87. SI les triangles ABC * & DEF qui ſont ſur les baſes égales AC & DF priſes chacune ſur la même ligne droite AF, ſont égaux ; la ligne droite tirée du ſommet B de l'un au ſommet E de l'autre, eſt parallele à cette ligne AF.

Conſt. Prolongez le côté DE vers H, à volonté. Tirez du point B aux points H & G pris auſſi à volonté ſur la ligne DH, l'un au-deſſus du point E, & l'autre au-deſſous, les lignes droites BH & BG. Enfin, tirez du point F aux mêmes points précédens H & G, les lignes droites FH & FG.

La démonſtration eſt la même que la précédente, nº 157.



PROPOSITION

PROPOSITION XLI.

THÉORÊME.

159. *Si un parallélogramme & un triangle sont sur une même base, & entre les mêmes paralleles, la surface du parallélogramme est double de celle du triangle.*

LE parallélogramme DB * qui est sur la même base DC que le triangle DEC, & entre les mêmes paralleles DC & AE, est double de ce triangle. Fig. 88.

Const. Tirez la diagonale AC.

Démonst. Les triangles DEC & DAC sont égaux (n); puisque [H] ils sont sur la même base DC, & entre les mêmes paralleles DC & AE. Or (n), le parallélogramme DB est double du triangle DAC. Donc (n), il est aussi double du triangle DEC. N. 154. N. 143. N. 67.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

160. Il suit de ce théorême, & du n° 151, que *la surface d'un triangle quelconque est égale au produit de la base de ce triangle, multipliée par la moitié de sa hauteur.*

Fig. 89. Le triangle ABC* eſt égal au produit de ſa baſe AC, multipliée par la moitié de ſa hauteur.

Conſt. Abaiſſez du point B à la baſe AC, prolongée autant qu'il le ſera néceſ-
N. 96. ſaire, la perpendiculaire BD (n). Tirez
N. 133. enſuite du même point B (n), la parallele BE à la même baſe AC; & du point C, la parallele CE au côté AB.

Démonſt. Le parallélogramme AE eſt
N. 151. égal (n) au produit de ſa baſe AC, multipliée par ſa hauteur BD. Or, le triangle ABC n'eſt que la moitié de ce parallélo-
N. 159. gramme (n). Donc il n'eſt égal qu'à la moitié de ce produit. Par conſéquent, il eſt égal au produit de ſa baſe AC, multipliée par la moitié de ſa hauteur BD.

Donc, C. Q. F. D.

SCHOLIE.

On déduit de ce corollaire cette regle générale du meſurage de toutes les figures planes qui ne ſont terminées que par des lignes droites.

161. Diviſez en triangles la figure propoſée, en tirant des lignes droites de quelques-uns de ſes angles à chacun de ſes autres angles. Meſurez enſuite la ſurface
N. 160. de chacun de ces triangles (n); & la

somme de toutes ces surfaces sera la surface demandée.

Ainsi, soit, *par exemple*, le polygone ABCDE * qu'il faut mesurer. Fig. 90.

On le divisera en triangles, par exemple AED, ABD & BCD, par des lignes droites DA & DB. On choisira pour bases de ces triangles, les côtés qui paroîtront les plus commodes ; c'est-à-dire, ceux qu'il ne sera pas nécessaire de prolonger pour leur abaisser des perpendiculaires, & qui sont ici les côtés DA & DB. Des angles E, B & C qui sont opposés à ces bases, on abaissera à ces mêmes bases (n) *les perpendiculaires E* f, *B* g *& C* h. *On mesurera ensuite chacune de ces bases, & chacune de ces perpendiculaires. Et si la base DA contient, par exemple,* 100 *mesures courantes égales chacune au côté de la mesure quarrée dont on voudra se servir, la base DB* 70, *la perpendiculaire E* f 37, *la perpendiculaire B* g 28, *& la perpendiculaire C* h 23; *on en conclura* (n) *que le triangle AED contient* 1850 *de ces mesures quarrées, le triangle ABD* 1400, *le triangle BCD* 805; *& que par conséquent le polygone ABCDE en contient* 4055.

N. 96.

N. 160.

PROPOSITION XLII.

PROBLÊME.

162. *Décrire un parallélogramme dont la surface soit égale à celle d'un triangle donné, & qui ait un angle égal à un angle aussi donné.*

IL faut décrire un parallélogramme qui
Fig. 91. soit égal au triangle ABC*, & qui ait un angle égal à l'angle D.
N. 93. *Const.* Divisez (n) le côté AC en deux
N. 119. parties égales AF & FC. Faites (n) sur l'une de ces parties, par exemple sur FC, l'angle GFC qui ait le point F pour sommet, & soit égal à l'angle D. Tirez du
N. 133. point B (n) la parallele indéfinie BE au
N. 81. côté AC. Prenez sur cette parallele (n) la partie GE égale à la partie FC. Enfin, tirez du point C au point E la ligne droite CE. Le quadrilatere FE est le parallélogramme demandé.

Pour la démonstration, tirez du point B au point F la ligne droite BF.

Démonst. Premiérement, le côté GE est égal & parallele au côté FC [c]. Ainsi
N. 142. (n), le quadrilatere FE est un parallélo-
N. 159. gramme. Par conséquent (n) il est double

du triangle FBC, puiſque [c] il eſt ſur la même baſe FC que ce triangle, & entre les mêmes paralleles AC & BE. Mais le triangle ABC eſt auſſi double du même triangle FBC; puiſque (n) les triangles N. 156. ABF & FBC, qui [c] ſont ſur les baſes égales AF & FC, & entre les mêmes paralleles AC & BE, ſont égaux. Donc (n) N. 67. le parallélogramme FE eſt égal au triangle ABC.

Secondement, le même parallélogramme a l'angle GFC égal à l'angle D [c].

Par conſéquent, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

163. *Si l'on propoſoit au contraire de* décrire un triangle qui fût égal à un parallélogramme quelconque DB*, & qui Fig. 91. eût un angle égal à l'angle G; *on le feroit de la maniere ſuivante.*

Conſt. *On prolongeroit indéfiniment les côtés DC & AB, l'un vers F, & l'autre vers E. On feroit ſur la ligne DF* (n) *l'angle* N. 119. *EDF qui auroit le point D pour ſommet, & ſeroit égal à l'angle G. On prendroit ſur cette même ligne* (n) *la partie CF égale* N. 81. *au côté DC. Enfin, on tireroit du point E au point F, la ligne droite EF; & le triangle DEF ſeroit le triangle demandé.*

Pour la démonſtration, *on tireroit du*

point E au point C, la ligne droite EC; & l'on démontreroit ensuite, par un raisonnement pareil au précédent, que le triangle DEF seroit le triangle demandé.

PROPOSITION XLIII.

THÉORÊME.

164. *Les complémens d'un parallélogramme ont des surfaces égales.*

Fig. 93. LES complémens DF* & FB du parallélogramme DB, sont égaux.

Démonst. Les triangles DAC & BCA
N. 143. sont égaux (n); & il en est de même, tant des triangles EAF & GFA, que des triangles IFC & HCF. Ainsi, si l'on retranche du triangle DAC, les triangles EAF & IFC; & du triangle BCA, les triangles
N. 64. GFA & HCF, les restes sont égaux (n). Or, ces restes sont les complémens DF & FB du parallélogramme DB. Donc les complémens de ce parallélogramme sont égaux.

Par conséquent, C. Q. F. D.

ROPOSITION XLIV.

PROBLÊME.

165. *Décrire ſur une ligne droite donnée, un parallélogramme dont la ſurface ſoit égale à celle d'un triangle donné, & qui ait un angle égal à un angle auſſi donné.*

IL faut décrire ſur la ligne droite AB * un parallélogramme qui ſoit égal au triangle C, & qui ait un angle égal à l'angle D. Fig 94.

Conſt. Prolongez la ligne AB vers E indéfiniment. Sur le prolongement BE pris auſſi grand qu'il le ſera néceſſaire, décrivez (n) un triangle BFE, dont les côtés N. 116. ſoient égaux à ceux du triangle C, chacun à chacun. Faites (n) un parallélogramme N. 162. BH qui ſoit égal au triangle BFE, & qui ait l'angle GBE égal à l'angle D. Prolongez indéfiniment vers K, vers L & vers N, les côtés HG, HI & GB. Faites (n) le N. 79. prolongement GK égal à la ligne AB. Du point K tirez par le point B la ligne KL; & par le point A, la ligne indéfinie KM. Enfin (n), tirez par le point L la parallele N. 133. LM à la ligne KH. Le quadrilatere MB ſera le parallélogramme demandé.

Démonst. Le quadrilatere MH est parallélogramme [c] ; ainsi, les parallélogrammes MB & BH qui en sont les com-
N. 164. plémens, sont égaux (n). Mais le parallélogramme BH est égal au triangle BFE [c], & le triangle BFE l'est [c] au triangle C. Donc, le parallélogramme MB est égal
N. 62. au triangle (n). Enfin, l'angle AB N
N. 101. est égal (n) à l'angle GBE qui lui est opposé au sommet ; & l'angle GBE est égal à l'angle D [c].

Donc, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

166. *Si l'on proposoit au contraire, de*
Fig. 94. *décrire sur une ligne droite AB * un triangle qui fût égal à un parallélogramme donné, & qui eût un angle égal à l'angle D, on le feroit de la maniere suivante.*

Sur le prolongement de la ligne AB, on décriroit un parallélogramme BH, qui soit double du parallélogramme proposé; & qui ait l'angle GBE égal à l'angle D. On achéveroit ensuite le parallélogramme MH, de même que dans le problême précédent. Enfin, on tireroit la diagonale AN; & l'on auroit un triangle ABN, qui seroit le triangle demandé.

Pour la démonstration, revoyez la précédente.

PROPOSITION XLV.

PROBLÊME.

167. *Décrire un parallélogramme dont la surface soit égale à celle d'une figure rectiligne quelconque, & qui ait un angle égal à un angle donné.*

Il faut décrire un parallélogramme qui soit égal à la figure rectiligne BD*, & qui Fig. 95.
ait un angle égal à l'angle E.

Conſt. Diviſez en triangles, par exemple ABC & ACD, la figure propoſée BD. Décrivez enſuite (n) un parallélogramme N. 162.
IG, qui ſoit égal à celui de ces triangles qu'il vous plaira, par exemple au triangle ABC; & qui ait un angle, par exemple l'angle I, égal à l'angle E. Faites enfin (n) N. 165.
ſur l'un des côtés de ce parallélogramme, par exemple ſur le côté HG, un autre parallélogramme HK qui ſoit égal au triangle ACD; & qui ait l'angle GHL égal à l'angle I. La figure rectiligne IK, formée par ces deux parallélogrammes, ſera le parallélogramme demandé.

Démonſt. Puiſque le quadrilatere IG eſt parallélogramme [c], la ſomme des angles GHI & I eſt égale à celle de deux

N. 130. angles droits (n). Mais [c] l'angle GHL
N. 61. eſt égal à l'angle I. Donc (n), la ſomme
des angles GHI & GHL eſt auſſi égale à
celle de deux angles droits ; & par conſé-
N. 100. quent (n) les lignes droites IH & HL, qui
[c] ſont tirées du même point H de la
droite GH , ne font qu'une ſeule ligne
droite IHL.

Pareillement, puiſque le quadrilatere
HK eſt parallélogramme [c], la ſomme
des angles HGK & GHL eſt égale à celle
N. 130. de deux angles droits (n). Mais [c], l'an-
gle GHL eſt égal à l'angle I, & l'angle I
N. 143. l'eſt à l'angle HGF (n). Donc la ſomme
des angles HGK & HGF eſt auſſi égale
N. 62. à celle de deux angles droits (n). Par
N. 100. conſéquent (n), les lignes droites FG &
GK, qui [c] ſont tirées du même point G
de la droite GH, ne font qu'une ſeule
ligne droite FGK.

Ainſi, la figure rectiligne IK eſt un qua-
drilatere. Par conſéquent un parallélo-
N. 57. gramme (n), puiſque [c & d] ſes côtés
IHL & FGK ſont paralleles, & que
ſes côtés IF & LK, qui [c] ſont paralleles
chacun à la même HG, ſont auſſi paral-
N. 132. leles entr'eux. (n) Or, *premiérement*, ce pa-
N. 72. rallélogramme eſt égal (n) à la figure rec-
tiligne BD ; puiſque [c] les parties IG &
HK de l'un ſont égales au parties ABC &

ACD de l'autre, chacune à chacune. *Secondement*, il a l'angle I égal à l'angle E [c].

Par conséquent, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

168. *Si la figure rectiligne BD* avoit plus de quatre côtés, & qu'il fallût la diviser, par exemple, en trois triangles.* Fig. 95.

Alors, après avoir décrit un parallélogramme IK égal aux deux premiers triangles ABC & ACD, de la maniere dont ce problême enseigne à le faire; on décriroit sur le côté LK de ce parallélogramme, un parallélogramme égal au troisieme triangle, de la même maniere dont on a décrit sur le côté HG le parallélogramme HK égal au triangle ACD. Et ainsi de suite, si la figure proposée se divisoit en un plus grand nombre de triangles.

169. *Mais si l'on proposoit de faire un parallélogramme qui fût égal à plusieurs figures rectilignes; par exemple, aux deux figures A* & B.* Fig. 96.

On commenceroit par en construire un FL (n) *qui soit égal à la figure A. Ensuite, sur l'un des côtés de ce parallélogramme FL, par exemple sur le côté ML, on en construiroit un autre MD* (n), *qui* N. 167. N. 167.

ſoit égal à ſa figure B ; & l'on auroit un parallélogramme FD, égal aux deux figures A & B.

Enfin, s'il s'agiſſoit d'augmenter encore le parallélogramme FD, d'une figure recti-
N. 167. *ligne quelconque KH, on conſtruiroit* (n) *ſur l'un des côtés FE ou ED du parallélogramme FD, un parallélogramme qui ſoit égal à cette figure KH ; & ainſi de ſuite.*

PROPOSITION XLVI.

PROBLÊME.

170. *Décrire un quarré ſur une ligne droite donnée.*

IL faut décrire un quarré ſur la ligne
Fig. 97. droite AB *.

N. 95. *Conſt.* Du point A, élevez (n) la perpendiculaire AD à la ligne AB. Du point
N. 95. B, élevez encore (n) la perpendiculaire BC à la même ligne. Faites ces perpendiculaires égales chacune à la ligne AB. Enfin, tirez du point D au point C, la ligne droite DC. Le quadrilatere AC que ces lignes formeront avec la ligne AB, ſera le quarré demandé.

Démonſt. Les côtés AD & BC ſont

égaux [c]; & paralleles (n), puisque [c] N. 129.
ils sont perpendiculaires chacun à la même ligne droite AB. Ainsi (n), le quadrilatere N. 142.
AC est parallélogramme. Or, dans ce parallélogramme, l'angle A est droit (n), N. 21.
& les côtés de suite AB & AD sont égaux [c]. Donc (n) ce parallélogramme est N. 46.
quarré.

Par conséquent, C. Q. F. F.

Autre Conſt. † Du Point A*, élevez la Fig. 98.
perpendiculaire AD à la ligne AB (n). Fai- N. 95.
tes cette perpendiculaire égale à cette ligne AB. Des points D & B pris pour centres, & avec encore cette même ligne AB prise pour rayon, décrivez deux arcs qui se coupent en un point C. Enfin tirez du point C aux points D & B, les lignes droites CD & CB. Le quadrilatere AC que ces lignes formeront avec les précédentes AB & AD, sera le quarré demandé.

Démonſt. Tous les côtés du quadrilatere AC sont égaux [c]. Ainsi (n), ce N. 55.
quadrilatere est parallélogramme. Or, dans ce parallélogramme, l'angle A est

† Nous donnons ces deux constructions, parce que la premiere est la plus commode sur le terrein, & la seconde sur le papier. A l'égard de la maniere d'élever sur le terrein une perpendiculaire à une ligne droite quelconque, *voyez* le n° 177.

N. 21. droit (n). Donc ce parallélogramme eſt
N. 146. quarré (n).

Par conſéquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION XLVII.

THÉORÊME.

171. *Dans un triangle rectangle, le quarré de l'hypothénuſe eſt égal à la ſomme des quarrés des deux autres côtés.*

Fig. 99. DANS le triangle ABC* qui eſt rectangle en B, le quarré AD de l'hypothénuſe AC eſt égal à la ſomme des quarrés AG & CH des deux autres côtés AB & BC.

Conſt. Du ſommet de l'angle droit B,
N. 133. tirez (n) la parallele BL au côté AE. Du même point B, tirez aux points E & D, les lignes droites BE & BD. Enfin, tirez du point F au point C la ligne droite FC, & du point A au point I, la ligne droite AI.

Démonſt. Dans les triangles ABE & AFC, l'angle BAE eſt égal à l'angle FAC
N. 63. (n); puiſque le premier eſt la ſomme de l'angle BAC, & de l'angle CAE qui eſt
N. 50. un angle droit (n); & que le ſecond eſt celle du même angle BAC, & de l'angle

BAF qui eſt auſſi un angle droit (n) : le côté AE eſt égal au côté AC (n) ; puiſque [H] l'un & l'autre ſont côtés du même quarré AD : enfin, le côté AB eſt égal au côté AF (n) ; puiſque [H] l'un & l'autre ſont auſſi côtés du même quarré AG. Donc, ces deux triangles ſont égaux (n). N. 50. N. 50. N. 50. N. 82.

Mais (n), le premier eſt la moitié de la partie AL du quarré AD ; puiſque [C] il eſt ſur la même baſe AE, & entre les mêmes paralleles AE & BL que cette partie, qui eſt un parallélogramme [C] : & le ſecond eſt auſſi la moitié du quarré AG (n) ; puiſque [C] il eſt auſſi ſur la même baſe AF que ce même quarré, & entre les mêmes paralleles AF & CG. Donc, la partie AL eſt égale au quarré AG (n). N. 159. N. 159. N. 67.

Or, on démontre de la même maniere, que les triangles CBD & CIA ſont égaux ; que le premier eſt la moitié de l'autre partie LC du quarré AD ; & que le ſecond eſt la moitié du quarré CH. Par conſéquent (n), cette autre partie LC eſt égale au quarré CH. Donc, le quarré AD qui eſt la ſomme de ces deux parties AL & LC, eſt égal à la ſomme des quarrés AG & CH. N. 67.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

172. Il ſuit de ce théorême, que *de pluſieurs lignes droites qui ſont tirées d'un même point à une même ligne droite ; celles qui ſont plus éloignées de la perpendiculaire, ſont plus grandes que celles qui en ſont moins éloignées.*

Fig. 101. La ligne droite CF* qui eſt plus éloignée de la perpendiculaire CD que la ligne droite CE, eſt plus grande que cette derniere ligne.

Démonſt. Dans le triangle FCD qui [H] eſt rectangle en D, le quarré de l'hypo-
N. 171. thénuſe CF eſt égal (n) à la ſomme des quarrés des côtés CD & DF : & dans le triangle ECD, qui [H] eſt auſſi rectangle en D, le quarré de l'hypothénuſe CE eſt
N. 171. égal (n) à la ſomme des quarrés des côtés CD & DE.

Or, cette premiere ſomme eſt plus grande que la derniere ; puiſque [H] le côté DF eſt plus grand que le côté DE. Donc, le quarré de l'hypothénuſe CF eſt plus grand que celui de l'hypothénuſe CE. Par conſéquent, la ligne CF eſt plus grande que la ligne CE.

Donc, C. Q. F. D.

USAGE I.

173. *On se sert ordinairement de cette proposition, pour résoudre le problême suivant.*

On donne les côtés A* & B de deux quarrés; & l'on propose de faire un quarré qui soit égal à la somme de ces deux quarrés. Fig. 100.

Solution. *Tirez une ligne droite ED égale à l'une des lignes données, par exemple à la ligne A. Du point D, élevez* (n) *la perpendiculaire DC à cette ligne ED.* N. 95. *Faites cette perpendiculaire égale à l'autre ligne donnée B. Enfin, tirez du point C au point E la ligne droite CE. Cette ligne sera le côté du quarré demandé.*

Démonst. *Le triangle ECD est rectangle en D* [c]. *Ainsi* (n), *le quarré de l'hypothénuse CE est égal à la somme des quarrés des côtés ED & DC.* N. 171. *Mais* [c], *ces côtés sont égaux aux lignes A & B, chacun à chacune. Donc, le quarré de l'hypothénuse CE est égal à la somme des quarrés des lignes A & B.*

Par conséquent, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

174. Il suit de la solution du problême

précédent : premiérement, que *pour faire un quarré qui ſoit double de celui de la*
Fig. 100 *ligne A *, il faut faire la perpendiculaire DC égale à la ligne ED.* Secondement[1], que *pour faire un quarré qui ſoit triple de celui de la même ligne A, il faut commencer par trouver le côté d'un quarré double, & faire enſuite la perpendiculaire DC égale à ce côté. Et ainſi de ſuite.*

USAGE II.

175. *On ſe ſert auſſi de cette propoſition pour réſoudre cet autre problême.*

Fig. 102 La longueur d'une échelle AB * eſt de 10 pieds ; & cette échelle étant poſée droite contre un mur D, elle eſt de même hauteur que ce mur. Si, en appuyant le haut de cette échelle contre ce mur, on éloigne ſon pied de celui de ce même mur, de 6 pieds ; de combien s'en faudra-t-il que la hauteur de cette échelle ainſi inclinée, ne ſoit égale à celle de ce mur ?

Solution. *La longueur AB de l'échelle, ſa hauteur AC, & la diſtance BC de ſon pied B au pied C du mur, forment un triangle ACB qui eſt rectangle en C. Ainſi*
N. 171. (n), *le quarré de la diſtance BC, (qui* [H] *eſt de 36 pieds) avec celui de la hauteur AC (qui eſt inconnu), doit être égal au quarré de la longueur AB, (qui* [H] *eſt de*

100 *pieds.*) *Mais, puiſque* 36 *pieds, avec le quarré qui eſt inconnu, doit faire* 100 *pieds, ce quarré inconnu doit être de* 64 *pieds. Par conſéquent, ſon côté AC eſt de* 8 *pieds. Or, puiſque la hauteur AC de l'échelle eſt de* 8 *pieds, & que* [H] *la hauteur EC du mur eſt de* 10 *pieds, il s'en faut de* 2 *pieds que la hauteur de l'échelle ne ſoit égale à celle du mur.*

Par conſéquent, C. Q. F. F.



PROPOSITION XLVIII.

THÉORÊME.

176. *Si dans un triangle le quarré de l'un des côtés est égal à la somme des quarrés des deux autres côtés, ce triangle est rectangle.*

Fig. 103 SI dans le triangle ABC *, le quarré du côté AC est égal à la somme des quarrés des deux autres côtés BC & BA, ce triangle est rectangle.

Const. De l'une quelconque des extrémités des côtés BA & BC, par exemple,
N. 95. de l'extrémité C du côté BC, élevez (n) la perpendiculaire CD à ce côté. Faites cette perpendiculaire égale à l'autre côté BA. Enfin, tirez du point B au point D, la ligne droite BD.

Démonst. Le quarré du côté AC est égal [H] à la somme des quarrés des côtés BC & BA; & par conséquent, à celle des quarrés des côtés BC & CD, puisque [C]
N. 171. les côtés BA & CD sont égaux. Mais (n), le quarré du côté BD est aussi égal à la somme des quarrés de ces mêmes côtés BC & CD; puisque [C] le triangle BCD

eſt rectangle en C. Donc (n), le quarré N. 62.
du côté AC eſt égal à celui du côté BD.
Par conſéquent, ces côtés ſont égaux.

Ainſi, les triangles ABC & BCD ont le côté BA égal au côté CD [c], le côté AC égal au côté BD [D], & le côté BC eſt commun. Donc (n), l'angle ABC eſt égal N. 88.
à l'angle BCD. Par conſéquent, puiſque l'angle BCD eſt droit [c], l'angle ABC l'eſt auſſi.

Donc, C. Q. F. D.

USAGE.

177. *On peut ſe ſervir de cette propoſition, de la maniere ſuivante, pour élever ſur le terrein une perpendiculaire à une ligne droite quelconque BC*.* Fig. 103

Après avoir pris pour meſure une longueur quelconque, mais cependant d'une grandeur raiſonnable, on marque ſur la ligne BC un point E, qui ſoit éloigné du point C de quatre fois cette meſure. On compte enſuite ſur une corde, premiérement trois parties, enſuite cinq parties, égales chacune à cette même meſure; & l'on y met une marque au point qui eſt compris entre les trois premieres parties & les cinq autres. On attache les deux bouts de cette corde, l'un au point C, & l'autre au point E. Enfin, on prend cette corde par le point

que l'on y a marqué : on s'avance vers D, jusqu'à ce que les deux parties de cette même corde soient également tendues. Et alors le point par lequel on la tient, détermine sur le terrein le point D, duquel, si l'on tire au point C la ligne droite DC, cette ligne sera la perpendiculaire demandée.

Démonst. *Dans le triangle ECD, le quarré* 25 *du côté ED, est égal* [c] *à la somme des quarrés* 16 *&* 9 *des deux autres*
N. 176. *côtés EC & CD. Donc* (n), *l'angle BCD est droit.*

Par conséquent, C. Q. F. F.





LES ÉLÉMENS D'EUCLIDE.

LIVRE SECOND.

QUOIQUE ce Livre ne contienne que quatorze propoſitions, il eſt cependant très-conſidérable; puiſque c'eſt par les principes qui y ſont établis que l'on démontre les propriétés des lignes courbes, & que l'on réſoud les problêmes qui en dépendent. Il eſt vrai qu'on peut le faire d'une maniere plus courte, par le moyen de l'algebre; mais les démonſtrations que l'on tirera de ce ſecond Livre ſeront toujours les plus ſatisfaiſantes, parce qu'elles ſeront toujours les plus lumineuſes. A l'égard de l'ordre, Euclide conſidere dans les premieres propoſitions les différens rectangles que l'on peut former des

parties d'une même ligne droite différemment divisée, & détermine de combien les uns different des autres. Il enseigne ensuite à diviser une ligne droite, suivant de certaines conditions ; ce qui fait un problême dont l'usage est assez fréquent dans la Géométrie. Il démontre aussi de combien le quarré du côté opposé à l'angle obtus d'un triangle, surpasse la somme des quarrés des deux autres côtés ; & de combien celui du côté opposé à un angle aigu, differe de cette somme. Enfin, il termine ce Livre par donner la maniere de faire un quarré qui soit égal à une figure rectiligne quelconque.

DÉFINITIONS.

178. ON dit, *le rectangle fait de telles lignes*, ou seulement, *le rectangle de telles lignes*, pour exprimer la surface du parallélogramme rectangle, dont l'une de ces lignes seroit la longueur, & l'autre la largeur.

Par exemple, on dit, le rectangle des
Fig. 1. lignes AB * & BC, *pour exprimer la surface du parallélogramme rectangle AC dont la ligne AB est la longueur, & la ligne BC la largeur.*

179. On dit de même, *le quarré fait ſur telle ligne*, ou ſeulement, *le quarré de telle ligne*, pour exprimer la ſurface du quarré dont cette ligne eſt le côté.

Par exemple, on dit, le quarré de la ligne AB*, *pour exprimer la ſurface du quarré AC dont cette ligne eſt le côté.* Fig. 3.

AVERTISSEMENT.

180. Premiérement, *ce Livre, qui au premier coup d'œil ſemble avoir quelque difficulté, deviendra fort aiſé, ſi, avant que de lire la démonſtration de chaque propoſition, on veut ſe donner la peine d'en faire ſoi-même la conſtruction, telle qu'elle y eſt enſeignée.*

Secondement, *lorſque l'on dira d'un quadrilatere qu'il* eſt rectangle [c], *cela ſignifiera :* 1° *que ſes côtés oppoſés ſont paralleles* [c]; *& que par conſéquent, il eſt parallélogramme :* 2° *qu'il a un angle droit* [c]; *& que par conſéquent, il eſt rectangle* (n). N. 145.



PROPOSITION I.

THÉORÊME.

181. *Si de deux lignes droites, l'une est divisée en plusieurs parties ; le rectangle de ces deux lignes est égal à la somme des rectangles faits de celle de ces lignes qui n'est point divisée, & de chaque partie de celle qui est divisée.*

Fig. 5. LE rectangle des lignes droites AB* & AD, (dont l'une AB est divisée, par exemple en trois parties quelconques AE, EF & FB,) est égal à la somme des rectangles faits, l'un de la ligne AD & de la partie AE; l'autre de la même ligne AD & de la partie EF; & le dernier, encore de la même ligne AD & de la partie FB.

Const. Faites le rectangle AC dont la ligne AB soit l'un des côtés, & la ligne AD l'autre. Par chaque point de division
N. 133. E & F, tirez (n) les paralleles EG & FH à la ligne AD.

Démonst. Les lignes EG & FH sont
N. 143. égales chacune à la ligne AD (n). Ainsi, puisque les quadrilateres AG, EH & FC sont rectangles [c], ils sont les rectangles, l'un de la ligne AD & de la partie AE;

l'autre, de la même ligne AD & de la partie EF ; & le dernier, encore de la même ligne AD & de la partie FB.

Or, ces trois rectangles sont toutes les parties du quadrilatere AC, qui est le rectangle des lignes AB & AD [c]. Donc (n), le rectangle AC des lignes AB & AD N. 72.
est égal à la somme des rectangles faits de la ligne AD, & de chaque partie AE, EF & FB de la ligne AB.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION II.

THÉORÊME.

182. *Si une ligne droite est divisée en plusieurs parties ; le quarré de cette ligne est égal à la somme des rectangles faits de cette même ligne, & de chacune de ces parties.*

LE quarré de la ligne droite AB*, qui Fig. 6.
est divisée, par exemple en trois parties quelconques AE, EF & FB, est égal à la somme des rectangles faits, l'un de cette ligne AB & de sa partie AE ; l'autre, de cette même ligne AB & de sa partie EF ; & le dernier, encore de cette même ligne AB & de sa partie FB.

N. 170. *Conſt.* Décrivez (n) le quarré AC ſur la ligne AB. Par chaque point de divi-
N. 133. ſion E & F, tirez (n) les paralleles EG & FH à la ligne AD.

Démonſt. Les lignes AD, EG & FH
N. 62. ſont égales chacune à la ligne AB (n),
N. 143. puiſque (n) les lignes EG & FH le ſont chacune à la ligne AD, qui eſt égale à cette ligne AB [c]. Ainſi, puiſque les quadrilateres AG, EH & FC ſont rectangles [c], ils ſont les rectangles, l'un de la ligne AB & de ſa partie AE; l'autre, de la même ligne AB & de ſa partie EF; & le dernier, encore de la même ligne AB & de ſa partie FB.

Or, ces trois rectangles ſont toutes les parties du quadrilatere AC, qui [c] eſt le
N. 72. quarré de la ligne AB. Donc (n), le quarré AC de la ligne AB eſt égal à la ſomme des rectangles faits de cette même ligne AB, & de chacune de ſes parties AE, EF & FB.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

SCHOLIE.

Cette propoſition ne differe de la premiere, qu'en ce que dans la premiere, les lignes AB & AD ſont inégales; & que dans celle-ci, elles ſont égales. Ainſi, elle n'eſt qu'un corollaire de cette premiere.

PROPOSITION III.

THÉORÊME.

183. *Si une ligne droite eſt diviſée en deux parties ; le rectangle de ces deux parties, avec le quarré de l'une quelconque de ces deux mêmes parties, eſt égal au rectangle de cette ligne & de cette derniere partie.*

Si une ligne droite AB * eſt diviſée en deux parties quelconques AE & EB ; le rectangle de ces deux parties, avec le quarré de l'une de ces parties, par exemple de la partie AE, eſt égal au rectangle de la ligne AB & de cette même partie AE. Fig. 7.

Conſt. Faites le rectangle AC dont la ligne AB ſoit l'un des côtés, & dont l'autre côté ſoit une ligne AD, égale à la partie AE. Par le point de diviſion E, tirez (n) la parallele EF à la ligne AD. N. 133.

Démonſt. Le quadrilatere AF eſt rectangle [c]. Ainſi (n), il eſt le quarré de la partie AE, puiſque ſon côté AD eſt égal à cette partie [c]. N. 146.

Le quadrilatere EC eſt auſſi rectangle [c]. Ainſi, il eſt le rectangle des parties

AE & EB, puiſque ſon côté EF eſt égal
N. 50. à la partie AE (n).

Or, ce quarré & ce rectangle ſont toutes les parties du quadrilatere AC, qui [c] eſt le rectangle de la ligne AB & de
N. 72. ſa partie AE. Donc (n), le rectangle EC des parties AE & EB, avec le quarré AF de la partie AE, eſt égal au rectangle AC de la ligne AB & de cette partie AE.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION IV.

THÉORÊME.

184. *Si une ligne droite eſt diviſée en deux parties; les quarrés de ces deux parties, avec deux rectangles faits chacun de ces mêmes parties, ſont égaux au quarré de cette ligne.*

Fig. 8. SI une ligne droite AB*, eſt diviſée en deux parties quelconques AE & EB; les quarrés de ces deux parties AE & EB, avec deux rectangles faits chacun de ces mêmes parties, ſont égaux au quarré de cette ligne AB.

N. 170. *Conſt.* Décrivez (n) le quarré DB ſur la ligne AB. Tirez la diagonale AC. Par

le point de diviſion E, tirez (n) la paral- N. 133.
lele EF à la ligne AD. Enfin, par le point
G auquel cette parallele rencontre la dia-
gonale AC, tirez (n) la parallele HI à la N. 133.
ligne AB.

Démonſt. Premiérement, l'angle exté-
rieur EGA eſt égal à ſon oppoſé intérieur
BCA (n), puiſque les lignes EF & BC N. 130.
ſont paralleles [c]. Or, l'angle BAC eſt
auſſi égal au même angle BCA (n), puiſ- N. 84.
que les côtés BC & BA du triangle ABC
ſont égaux (n). Donc, l'angle EGA eſt N. 50.
égal à l'angle BAC (n); & par conſé- N. 62.
quent, les côtés AE & EG du triangle
AEG ſont égaux (n). Mais, ces côtés AE N. 86.
& EG ſont auſſi ceux du quadrilatere HE.
Donc, puiſque ce quadrilatere eſt rec-
tangle [c], il eſt quarré (n); & par con- N. 146.
ſéquent, il eſt le quarré de la partie AE,
puiſque cette partie eſt un de ſes côtés.

Secondement, l'angle extérieur IGC
eſt égal à ſon oppoſé intérieur BAC (n), N. 130.
puiſque les lignes HI & AB ſont paralle-
les [c]. Or [D], l'angle BCA eſt auſſi égal
au même angle BAC. Donc, les angles
IGC & BCA ſont égaux (n). Par conſé- N. 62.
quent, les côtés IC & IG du triangle
GIC le ſont auſſi (n). Mais, ces côtés N. 86.
IC & IG ſont auſſi ceux du quadrilatere
FI. Donc, puiſque ce quadrilatere eſt

N. 146. rectangle [c], il eſt quarré (n). Par conſéquent, il eſt le quarré de la partie EB, puiſque cette partie eſt égale au côté IG
N. 143. (n).

Troiſiémement, le côté EG eſt égal à
N. 50. la partie AE (n). Ainſi, puiſque le quadrilatere GB eſt rectangle [c], il eſt le rectangle des parties AE & EB.

Quatriémement, enfin, le côté HG eſt
N. 50 égal à la partie AE (n); & le côté GF
N. 62. l'eſt à la partie EB (n), puiſque la même
N. 50. ligne IG eſt égale, & à ce côté (n), &
N. 143. à cette partie (n). Ainſi, puiſque le quadrilatere DG eſt auſſi rectangle [c], il eſt encore un rectangle des parties AE & EB.

Or, ces deux quarrés HE & FI, avec ces deux rectangles GB & DG, ſont toutes les parties du quadrilatere DB, qui [c] eſt le quarré de la ligne AB. Donc
N. 72. (n), les quarrés HE & FI des parties AE & EB, avec les deux rectangles GB & DG, faits chacun de ces mêmes parties, ſont égaux au quarré DB de la ligne AB. Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

185. Il ſuit de ce théorême, que *le quarré d'une ligne eſt quadruple de celui de la moitié de cette même ligne.*

Le quarré de la ligne AB * eſt quadruple de celui de la moitié de cette ligne. Fig. 9.

Conſt. Diviſez (n) la ligne AB en deux parties égales AC & CB. N. 93.

Démonſt. Puiſque les parties AC & CB ſont égales [c], le quarré de la premiere, celui de la ſeconde, & le rectangle fait de la premiere & de la ſeconde, ſont trois choſes égales. Or (n), le quarré de la ligne AB eſt égal au quarré de cette même premiere partie, à celui de cette même ſeconde partie, & à deux rectangles faits chacun de ces deux mêmes parties. Donc, il eſt égal à quatre fois le quarré de cette premiere partie. N. 184.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

186. Il ſuit auſſi de la démonſtration de ce même théorême, qu'*un parallélogramme qui a un angle de commun avec un quarré, & dont la diagonale eſt une partie de celle de ce quarré, eſt un quarré.*

Le parallélogramme, par exemple HE*, qui a l'angle A de commun avec le quarré DB, & dont la diagonale AG eſt une partie de la diagonale AC de ce même quarré, eſt un quarré. Fig. 8.

Démonſt. Par quelque point de la diagonale AC que l'on tire une parallele EF

au côté BC, l'angle EGA eſt toujours
N. 130. égal à l'angle BCA (n); & par conſé-
N. 84. quent à l'angle BAC (n), puiſque les côtés BA & BC ſont toujours égaux [H]. Ainſi, le parallélogramme HE a toujours deux
N. 86. côtés de ſuite AE & EG égaux (n):
N. 50. d'ailleurs, il eſt toujours rectangle (n); puiſque [H] il a toujours un angle de commun avec le quarré DB. Donc, il eſt
N. 146. toujours quarré (n).

Par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION V.

THÉORÊME.

187. *Si une ligne droite eſt diviſée en deux parties; le rectangle de ces deux parties, avec le quarré de la moitié de leur différence, eſt égal au quarré de la moitié de cette ligne.*

Fig. 10. SI une ligne droite AB* eſt diviſée en deux parties quelconques AE & EB; le rectangle de ces deux parties AE & EB, avec le quarré de la moitié de leur différence, eſt égal au quarré de la moitié de cette ligne AB.

N. 93. *Conſt.* Diviſez (n) la ligne AB en deux
N. 170. parties égales AK & KB. Décrivez (n)

le quarré KC ſur la partie KB. Tirez la diagonale DB. Par le point de diviſion E, tirez (n) la parallele EF à la ligne KD. N. 135.
Par le point G, auquel cette parallele rencontre la diagonale DB, tirez (n) la pa- N. 133.
rallele HL à la ligne AB. Enfin, par le point A, tirez (n) la parallele AH à la N. 135.
ligne KD.

Démonſt. [c] les quadrilateres AI & KL ſont parallélogrammes, ils ont des baſes égales AK & KB, & ils ſont entre les mêmes paralleles AB & HL; ainſi ils ſont égaux (n). Mais, les quadrilateres N. 147.
KL & EC ſont auſſi égaux; puiſqu'ils ont une partie commune EL, & que l'autre partie KG du premier eſt égale à l'autre partie GC du ſecond (n). Donc, les qua- N. 164.
drilateres AI & EC ſont égaux (n). Par N. 62.
conſéquent, ſi l'on ajoute à l'un & à l'autre les quadrilateres KG & IF, la premiere ſomme, c'eſt-à-dire les quadrilateres AI, KG & IF, eſt égale (n) à celle des qua- N. 63.
drilateres EC, KG & IF. Or les quadrilateres AG & IF ſont égaux à cette premiere ſomme, & la ſeconde fait toutes les parties du quarré KC. Donc, les quadrilateres AG & IF ſont égaux au quarré KC (n). N. 72.

Mais le premier de ces deux quadrilateres eſt rectangle [c], la partie AE de la

ligne AB eſt l'un de ſes côtés, & ſon autre côté EG eſt égal à l'autre partie EB de
N. 186. cette même ligne (n). Ainſi, il eſt le rectangle des parties AE & EB de la ligne AB.

N. 186. Et le ſecond IF eſt quarré (n), ſon côté
N. 143. IG eſt égal à la partie KE (n), & cette partie eſt la demi-différence † des parties AE & EB de la ligne AB. Ainſi, il eſt le quarré de la demi-différence de ces deux parties.

Donc, le rectangle AG des parties AE & EB de la ligne AB, avec le quarré IF de la demi-différence KE de ces mêmes parties, eſt égal au quarré KC, qui eſt celui de la moitié KB de cette même ligne AB (c).

Par conſéquent, C. Q. F. D.

Fig. 10. † Lorſqu'une ligne droite quelconque AB eſt diviſée en deux parties inégales AE & EB, la partie KE qui eſt compriſe entre ſon milieu K & ſon point de diviſion E, eſt toujours la moitié de la différence de ces parties inégales.

Car, ſi ſur la plus grande partie AE on prend une partie AM égale à la plus petite EB, le reſte ME eſt la différence de ces deux parties AE & EB. Or, les parties AK & KB ſont égales, puiſque [H] le point K eſt le milieu de la ligne AB; & les parties AM & EB ſont auſſi égales [C]. Donc, la partie MK eſt égale à la partie KE; & par conſéquent, cette partie KE eſt la moitié de la différence ME.

USAGE.

188. *On peut se servir de cette proposition, de la maniere suivante, pour résoudre ce problême.*

Un rectangle AC * a 112 pieds de surface, & 44 pieds de circonférence. Combien sa longueur AB, & sa largeur BC, contiennent-elles de pieds chacune? Fig. 11.

SOLUTION. Puisque [H] *le rectangle AC a 44 pieds de circonférence, sa longueur AB & sa largeur BC ont ensemble 22 pieds. Ainsi, l'on suppose une ligne droite ABE de 22 pieds, dont la moitié FE n'est par conséquent que de 11 pieds; après quoi, l'on raisonne de cette maniere:*

La ligne ABE est divisée en deux parties AB & BE, & le point F est son milieu. Ainsi (n), *le rectangle AC de ces deux parties (qui* [H] *est de 112 pieds), avec le quarré de leur demi-différence FB (qui est inconnu,) doit être égal au quarré de la ligne FE, (lequel est de 121 pieds* [H]*). Donc, ce quarré qui étoit inconnu est de 9 pieds; & par conséquent, la demi-différence FB est de 3 pieds. Or, puisque la ligne AF est de 11 pieds, & la demi-différence FB de 3, le côté AB est de 14 pieds, & le côté BC de 8.* N. 187.

Par conséquent, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

189. *La surface d'un rectangle, considérée comme une quantité discrete, n'est autre* N. 149. *chose* (n) *que le produit des deux nombres qui expriment les valeurs des côtés de ce rectangle. Ainsi, l'on auroit pu énoncer de cette maniere le problême précédent:*

Le produit de deux nombres est 112, & leur somme 22; quels sont ces deux nombres?

Et pour le résoudre, on auroit dit, par le même principe que dans l'usage précédent: le produit 112 *des deux nombres démandés, avec le quarré de leur demi-différence, doit être égal au quarré* 121 *de la moitié de leur somme. Donc, le quarré de leur demi-différence est* 9; *& par conséquent, leur demi-différence est* 3. *Or, puisque la moitié de la somme des deux nombres demandés est* 11, *& que leur demi-différence est* 3, *le plus grand de ces deux nombres est* 14, *& le plus petit est* 8.

D'où l'on voit que l'on peut résoudre par cette proposition, toutes les questions numériques dans lesquelles il ne s'agit que de trouver deux nombres dont on connoît le produit & la somme.

PROPOSITION VI.

THÉORÊME.

190. *Si une ligne droite est divisée en deux parties ; le rectangle de cette ligne & de l'une quelconque de ces deux parties, avec le quarré de la moitié de l'autre partie, est égal au quarré d'une ligne composée de cette premiere partie, & de la moitié de cette autre partie.*

Si une ligne droite AB * est divisée en deux parties quelconques AE & EB ; le rectangle de cette ligne AB & de sa partie, par exemple EB, avec le quarré de la moitié de l'autre partie AE, est égal au quarré d'une ligne composée de cette premiere partie EB, & de la moitié de cette autre partie AE. Fig. 12.

Const. Divisez (n) la partie AE en deux parties égales AK & KE. Décrivez (n) le quarré KC sur la ligne KB. Tirez la diagonale DB. Par le point de division E, tirez (n) la parallele EF à la ligne KD. Par le point G, auquel cette parallele rencontre la diagonale DB, tirez (n) la parallele HL à la ligne AB. Enfin, par le N. 93. N. 170. N. 133. N. 133.

N. 133. point A, tirez (n) la parallele AH à la ligne KD.

Démonst. [c] Les quadrilateres AI & KG sont parallélogrammes, ils ont des bases égales AK & KE, & ils sont entre les mêmes paralleles AB & HL; ainsi ils sont égaux
N. 147. (n). Mais, les quadrilateres KG & GC
N. 164. le sont aussi (n). Donc, le quadrilatere
N. 62. AI est égal au quadrilatere GC (n).

Par conséquent, si l'on ajoute à l'un & à l'autre les quadrilateres KL & IF, la premiere somme, c'est-à-dire les quadri-
N. 63. lateres AI, KL & IF, est égale (n) à celle des quadrilateres GC, KL, & IF. Or, les quadrilateres AL & IF sont égaux à cette premiere somme, & la seconde fait
N. 72. toutes les parties du quarré KC. Donc (n), les quadrilateres AL & IF sont égaux au quarré KC.

Mais, le premier de ces deux quadrilateres est rectangle [c], la ligne AB est l'un de ses côtés, & son autre côté BL est égal à la partie EB de cette même li-
N. 186. gne (n). Ainsi, il est le rectangle de la ligne AB & de sa partie EB.

N. 186. Et le second IF est quarré (n), son côté
N. 143. IG est égal à la partie KE (n), & cette partie est la moitié de l'autre partie AE de la ligne AB [c]. Ainsi il est le quarré de la moitié de cette autre partie.

Donc, le rectangle AL de la ligne AB & de sa partie EB, avec le quarré IF de la moitié KE de l'autre partie AE de cette même ligne, est égal au quarré KC de la ligne KB, laquelle est composée de cette premiere partie EB, & de la moitié KE de cette autre partie AE.

Par conséquent, C. Q. F. D.

SCHOLIE.

191. *La ligne KE* est la moitié de la différence AE des lignes AB & EB. Ainsi, la ligne KB est la moitié de leur somme; & par conséquent, ce théorême & le précédent ne sont qu'une même proposition, que l'on auroit pu énoncer de cette maniere :* le rectangle de deux lignes droites quelconques, avec le quarré de la moitié de leur différence, est égal au quarré de la moitié de leur somme. Fig. 12.

C'est la parité de ces deux théorêmes qui fait que leurs démonstrations sont presque les mêmes.

USAGE.

192. *On peut se servir de cette proposition, de la maniere suivante, pour résoudre ce problême.*

Un rectangle AC * a 216 pieds de surface, & sa longueur AB surpasse de 6 pieds Fig. 13.

ſa largeur BC. Combien cette longueur & cette largeur contiennent-elles de pieds chacune?

SOLUTION. Puiſque [H] *le côté AB ſurpaſſe de 6 pieds le côté BC, on prend ſur ce côté AB une partie AE de 6 pieds, & le reſte EB eſt égal au côté BC; après quoi, l'on raiſonne de cette maniere:*

La ligne AB eſt diviſée en deux parties
N. 190. *AE & EB. Ainſi* (n), *le rectangle AC de cette ligne & de la partie EB, (lequel eſt de 216 pieds* [H]), *avec le quarré de la moitié FE de la partie AE, (lequel eſt de 9 pieds* [C],) *doit être égal au quarré de la ligne FB. Donc, le quarré de la ligne FB eſt de 225 pieds; & par conſéquent, cette ligne eſt de 15 pieds. Or, puiſque la ligne FB eſt de 15 pieds, & que* [C] *la ligne AF eſt de 3 pieds, le côté AB eſt de 18 pieds, & le côté BC de 12.*

Par conſéquent, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

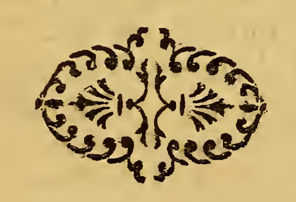
193. *Par la même raiſon que dans la*
N. 189. *derniere ſcholie* (n), *on auroit pu énoncer de cette maniere le problême précédent:*

Le produit de deux nombres eſt 216, & leur différence 6; quels ſont ces deux nombres?

Et pour le réſoudre, on auroit dit, par

le même principe que dans l'usage précédent : le produit 216 *des deux nombres demandés, avec le quarré* 9 *de leur demi-différence, doit être égal au quarré de la moitié de leur somme. Donc, ce quarré est* 225 ; *& par conséquent, cette demi-somme est* 15. *Or, puisque la moitié de la somme des deux nombres demandés est* 15, *& que leur demi-différence est* 3, *le plus grand de ces deux nombres est* 18, *& le plus petit* 12.

D'où l'on voit que l'on peut résoudre par cette proposition, toutes les questions numériques dans lesquelles il ne s'agit que de trouver deux nombres dont on connoît le produit & la différence.



PROPOSITION VII.

THÉORÊME.

194. *Si une ligne droite eſt diviſée en deux parties ; le quarré de l'une quelconque de ces deux parties, avec deux rectangles faits chacun de cette ligne & de ſon autre partie, eſt égal au quarré de cette même ligne, plus celui de cette autre partie.*

Fig. 14. SI une ligne droite AB * eſt diviſée en deux parties quelconques AE & EB, le quarré de la partie, par exemple EB, avec deux rectangles faits chacun de la ligne AB & de l'autre partie AE, eſt égal au quarré de cette même ligne AB, plus celui de cette autre partie AE.

N. 170. *Conſt.* Décrivez (n) le quarré AC ſur la ligne AB. Tirez la diagonale DB. Par
N. 133. le point de diviſion E, tirez (n) la parallele EF à la ligne AD. Prolongez les lignes AD & EF, juſqu'à ce que leurs prolongemens AK & EL ſoient égaux chacun à la partie AE. Tirez du point K au point L, la ligne droite KL. Enfin, par le point G, auquel la parallele LF rencontre la diagonale DB, tirez (n) la pa-
N. 133. rallele HI à la ligne AB.

Démonſt. Le quadrilatere HC eſt rectangle [c] ; ſon côté HI eſt égal à la ligne AB (n) : & ſon autre côté IC eſt égal à la partie AE de cette même ligne (n) ; puiſque les lignes BC & BA ſont égales, & que leurs parties BI & BE le ſont auſſi (n). Ainſi, ce quadrilatere eſt un rectangle de la ligne AB & de ſa partie AE. N. 143. N. 64. N. 50.

Mais, le quadrilatere HL eſt auſſi rectangle [c] ; ſon côté HG eſt égal à la partie AE de la ligne AB (n) : & ſon autre côté LG eſt égal à cette même ligne, puiſque les parties EL & EG de l'un ſont égales aux parties EA & EB de l'autre, chacune à chacune (n). Donc, cet autre quadrilatere eſt encore un rectangle de cette même ligne AB & de cette même partie AE. N. 143. N. 50.

Or, ce quarré EI, qui eſt celui de la partie EB de la ligne AB (n), & ces deux rectangles HC & HL faits chacun de cette même ligne AB & de ſon autre partie AE, ſont toutes les parties du quarré AC de cette ligne, & du quarré AL de ſa partie AE. Donc, ils ſont égaux à ces deux quarrés (n). N. 186. N. 72.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

USAGE.

195. *On peut ſe ſervir de cette propoſi-*

tion, de la maniere ſuivante, pour réſoudre ce problême.

Fig. 15. Un rectangle DB * a 432 pieds de ſurface, & 30 pieds de diagonale. Combien ſa longueur AB & ſa largeur BC contiennent-elles de pieds chacune ?

SOLUTION. On tire la diagonale AC. On ſuppoſe enſuite le plus grand côté AB diviſé en deux parties, dont l'une EB ſoit égale au plus petit côté BC; après quoi, l'on raiſonne de cette maniere :

La ligne AB eſt diviſée en deux parties
N. 194. *AE & EB. Ainſi* (n), *le quarré de la partie AE (qui eſt inconnu) avec deux rectangles DB & DB faits chacun de la ligne AB & de l'autre partie EB (leſquels pris enſemble, valent 864 pieds* [H],) *doit être égal au quarré de cette ligne AB & de cette autre partie EB; c'eſt-à-dire aux quarrés des côtés AB & BC; & par conſéquent, au quarré de l'hypothénuſe AC*
N. 171. (n), *puiſque le triangle ABC eſt rectangle en B* [H]. *Mais* [H], *ce quarré eſt de 900 pieds. Donc, celui de la partie AE qui étoit inconnu, n'eſt que de 36 pieds; & par conſéquent, cette partie eſt de 6 pieds. Or, puiſque la partie AE eſt de 6 pieds, la longueur AB du rectangle DB, qui a 432 pieds de ſurface, ſurpaſſe de 6 pieds ſa lar-*
N. 192. *geur BC. Donc* (n), *cette longueur AB eſt*

de 24 pieds, & cette largeur BC eſt de 18. *Par conſéquent, C. Q. F. F.*

PROPOSITION VIII.

THÉORÊME.

196. *Si une ligne droite eſt diviſée en deux parties; quatre rectangles faits chacun de ces deux parties, avec le quarré de la différence de ces deux mêmes parties, ſont égaux au quarré de cette ligne.*

SI une ligne droite AB* eſt diviſée en deux parties quelconques AC & CB; quatre rectangles de ces deux parties, avec le quarré de la différence de ces deux mêmes parties, ſont égaux au quarré de cette ligne AB. Fig. 16.

Démonſt. La ligne AB eſt diviſée en deux parties AC & CB. Ainſi (n), le rectangle de ces deux parties, avec le quarré de la moitié de leur différence, eſt égal au quarré de la moitié de cette ligne. Donc (n), quatre rectangles de ces deux parties, avec quatre quarrés de cette demi-différence, (c'eſt-à-dire (n), avec le quarré de la différence entiere,) ſont égaux à quatre quarrés de la moitié N. 187. N. 67. N. 185.

de cette ligne ; & par conſéquent, au
N. 185. quarré de cette ligne entiere (n).
Donc, C. Q. F. D.

SCHOLIE.

197. *Cette propoſition n'eſt qu'un corollaire de la cinquieme.*

PROPOSITION IX.

THÉORÊME.

198. *Si une ligne droite eſt diviſée en deux parties ; les quarrés de ces deux parties ſont doubles du quarré de la moitié de cette ligne, & du quarré de la moitié de la différence de ces mêmes parties.*

Fig. 17. SI une ligne droite AB * eſt diviſée en deux parties quelconques AC & CB ; les quarrés de ces parties AC & CB ſont doubles du quarré de la moitié de cette ligne AB, & de celui de la moitié de la différence de ces mêmes parties AC & CB.

N. 93. *Conſt.* Diviſez (n) la ligne AB en deux parties égales AD & DB. Du point D,
N. 95. élevez (n) la perpendiculaire DE à cette ligne AB. Faites cette perpendiculaire égale

égale à l'une des parties AD & DB. Tirez du point E aux points A & B, les lignes droites EA & EB. Par le point de diviſion C, tirez (n) la parallele CF à la ligne DE. N. 133.
Par le point F auquel cette parallele rencontre la ligne EB, tirez (n) la parallele N. 133.
GF à la ligne AB. Enfin, tirez du même point F au point A, la ligne droite FA.

Démonſt. Premiérement. Le triangle AED eſt rectangle & iſoſcele [c]; ainſi, les angles DAE & DEA ſont chacun la moitié d'un angle droit (n). Or, il en eſt N. 138.
de même des angles DBE & DEB du triangle BDE, puiſque ce ſecond triangle eſt égal au premier (n). Donc, l'angle N. 82.
AEB eſt un angle droit; & par conſéquent, le triangle AEF eſt rectangle en E.

Secondement. Les lignes GF & AB qui ſont coupées par la ligne EB, ſont paralleles [c]; ainſi, l'angle extérieur GFE eſt égal à l'intérieur DBE (n). Or, les lignes N. 130.
CF & DE qui ſont auſſi coupées par la même ligne EB, ſont auſſi paralleles [c]; ainſi, l'angle extérieur CFB eſt auſſi égal à l'intérieur DEB (n). Donc, les angles N. 130.
GFE & CFB ſont auſſi chacun la moitié d'un angle droit. Par conſéquent, les triangles EGF & FCB ſont auſſi rectangles, l'un en G & l'autre en C (n); les N. 136.
côtés GF & GE du premier ſont égaux;

& les côtés CB & CF du second le sont
N. 86. aussi (n).

Troisiémement. Le triangle ADE est rectangle & isoscele [C]; ainsi, le quarré du côté AE est double de celui du côté
N. 171. AD (n) : & puisque le triangle EGF est aussi rectangle & isoscele [D], le quarré du côté EF est aussi double de celui du
N. 171. côté GF (n) ; & par conséquent, de celui
N. 143. de la partie DC (n).

Or, les quarrés des parties AC & CB de la ligne AB, sont égaux à ceux des côtés AC & CF du triangle ACF, puisque la partie CB est égale au côté CF [D] : les quarrés des côtés AC & CF sont égaux
N. 171. au quarré du côté AF (n), puisque le triangle ACF est rectangle en C [D] : le quarré du côté AF est égal aux quarrés
N. 171. des côtés AE & EF du triangle AEF (n), puisque ce triangle est aussi rectangle en E [D]. Enfin, le quarré du côté AE est double de celui du côté AD [D]; & le quarré du côté EF est double de celui de la
N. 62. partie DC. Donc (n), les quarrés des parties AC & CB de la ligne AB, sont égaux au double du quarré du côté AD, plus le double du quarré de la partie DC. Par conséquent, ces deux premiers quarrés ensemble, sont doubles de ces deux derniers ensemble.

Mais, le côté AD eſt la moitié de la ligne AB [c]; & la partie DC eſt la demi-différence † des parties AC & CB de cette même ligne. Donc, les quarrés des parties AC & CB de la ligne AB ſont doubles du quarré de la moitié AD de cette ligne, & du quarré de la demi-différence DC des parties AC & CB de cette même ligne.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

USAGE.

199. *On peut ſe ſervir de cette propoſition, de la maniere ſuivante, pour réſoudre ce problême.*

Un rectangle DB * a 70 pieds de circonférence, & 25 pieds de diagonale. Combien ſa longueur AB & ſa largeur BC, contiennent-elles de pieds, chacune? Fig. 18.

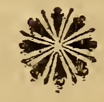
SOLUTION. Puiſque [H] *le rectangle DB a 70 pieds de circonférence, ſa longueur AB & ſa largeur BC, ont enſemble 35 pieds. Ainſi, l'on ſuppoſe une ligne droite ABE de 35 pieds, dont la moitié AF eſt par conſéquent de* $17\frac{1}{2}$ *pieds; & après avoir tiré la diagonale AC, on raiſonne de cette maniere:*

La ligne AE eſt diviſée en deux parties

† Voyez la note du nº 187.

AB & BE, & le point F est son milieu.
N. 198. *Ainsi* (n), *le quarré de la ligne AF, (lequel est de 306 $\frac{1}{4}$ pieds* [H]), *avec celui de la demi-différence FB, (qui est inconnu), doit être égal à la moitié de la somme des quarrés des parties A B & B E; c'est-à-dire à la moitié de la somme des quarrés des côtés AB & BC; & par conséquent, à la moitié du quarré de la diagonale AC*
N. 171. (n), *puisque* [H] *le triangle ABC est rectangle en B. Mais, la moitié de ce quarré est de 312 $\frac{1}{2}$ pieds* [H]. *Donc, le quarré qui étoit inconnu est de 6 $\frac{1}{4}$ pieds : & par conséquent, la demi-différence FB est de 2 $\frac{1}{2}$ pieds. Or, puisque la ligne AF est de 17 $\frac{1}{2}$ pieds, & la demi-différence FB de 2 $\frac{1}{2}$ pieds, le côté AB est de 20 pieds, & le côté BC de 15.*

Par conséquent, C. Q. F. F.



PROPOSITION X.

THÉORÊME.

200. *Si une ligne droite eſt diviſée en deux parties ; le quarré de cette ligne, avec celui de l'une quelconque de ces deux parties, eſt double du quarré de la moitié de l'autre partie, & du quarré d'une ligne compoſée de cette premiere partie & de la moitié de cette autre partie.*

Si une ligne droite AB * eſt diviſée en deux parties quelconques AC & CB, le quarré de cette ligne AB, avec celui de la partie, par exemple CB, eſt double du quarré de la moitié de l'autre partie AC, & du quarré d'une ligne compoſée de cette premiere partie CB & de la moitié de cette autre partie AC. Fig. 19.

Conſt. Diviſez (n) la partie AC en deux parties égales AD & DC. Du point D, élevez (n) la perpendiculaire DE à la ligne AB. Faites cette perpendiculaire égale à l'une des parties AD & DC. Par le point E, tirez (n) la parallele indéfinie EF à la ligne AB. Du même point E, tirez par le point de diviſion C, la ligne N. 93. N. 95. N. 133.

droite indéfinie EG. Par le point B, tirez
N. 133. (n) une ligne GF parallele à la perpendiculaire DE; & qui rencontre les lignes EF & EG, l'une à un point F, & l'autre à un point G. Enfin, tirez du point A aux points E & G, les lignes droites AE & AG.

Démonst. Premiérement. Le triangle ADE est rectangle & isoscele [c]; ainsi, les angles DAE & DEA sont chacun la
N. 138. moitié d'un angle droit (n). Or, il en est de même des angles DCE & DEC du triangle CDE, puisque ce second triangle
N. 82. est égal au premier (n). Donc, l'angle AEC est un angle droit; & par conséquent, le triangle AEG est rectangle en E.

Secondement. Les lignes EF & AB qui sont coupées par la ligne EG, sont paralleles [c]; ainsi, l'angle FEG est égal à
N. 130. son alterne DCE (n). Or, les lignes GF & DE qui sont aussi coupées par la même ligne EG, sont aussi paralleles [c]; ainsi, l'angle FGE est aussi égal à son alterne
N. 130. DEC (n). Enfin, les angles BCG & DCE qui sont opposés au sommet, sont aussi
N. 101. égaux (n). Donc, les angles FEG, FGE & CBG, sont aussi chacun la moitié d'un angle droit. Par conséquent, les triangles EFG & CBG sont aussi rectangles, l'un
N. 136. en F & l'autre en B (n); les côtés EF &

FG du premier ſont égaux ; & les côtés CB & BG du ſecond le ſont auſſi (n). N. 86.

Troiſiémement. Le triangle ADE eſt rectangle & iſoſcele [C] ; ainſi, le quarré du côté AE eſt double de celui du côté AD (n) : & puiſque le triangle EFG eſt N. 171. auſſi rectangle & iſoſcele [D], le quarré du côté EG eſt auſſi double de celui du côté EF (n) ; & par conſéquent, de celui N. 171. de la ligne DB (n). N. 143.

Or, le quarré de la ligne AB, avec celui de ſa partie CB, eſt égal aux quarrés des côtés AB & BG du triangle ABG ; puiſque la partie CB eſt égale au côté BG [D] : les quarrés des côtés AB & BG ſont égaux au quarré du côté AG (n), N. 171. puiſque le triangle ABG eſt rectangle en B [D] : le quarré du côté AG eſt égal aux quarrés des côtés AE & EG du triangle AEG (n), puiſque ce triangle eſt auſſi N. 171. rectangle en E [D] : enfin [D], le quarré du côté AE eſt double de celui du côté AD ; & le quarré du côté EG eſt double de celui de la ligne DB. Donc (n), le N. 62. quarré de la ligne AB avec celui de ſa partie CB, eſt égal au double du quarré du côté AD, plus le double du quarré de la ligne DB. Par conſéquent, ces deux premiers quarrés enſemble, ſont doubles de ces deux derniers enſemble.

Mais, le côté AD eſt la moitié de la partie AC de la ligne AB [c]; & la ligne DB eſt compoſée de la premiere partie CB de cette même ligne AB & de la moitié DC de ſon autre partie AC. Donc, le quarré de la ligne AB, avec celui de ſa partie CB, eſt double du quarré de la moitié AD de l'autre partie AC de cette ligne, & du quarré de la ligne DB, laquelle eſt compoſée de cette premiere partie CB, & de la moitié DC de cette autre partie AC.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

SCHOLIE.

Fig. 19. 201. *La ligne DC* eſt la moitié de la différence AC des lignes AB & CB, comme nous l'avons déja obſervé au* n° 191. *Ainſi, la ligne DB eſt la moitié de leur ſomme; & par conſéquent, ce théorême & le précédent ne ſont auſſi qu'une même propoſition, que l'on auroit pu énoncer de cette maniere:*

Les quarrés de deux lignes droites quelconques ſont doubles de ceux de la moitié de la ſomme de ces deux lignes, & de la moitié de la différence de ces mêmes lignes.

C'eſt auſſi la parité de ces deux théorêmes qui eſt la cauſe de celle de leurs démonſtrations.

USAGE.

202. *On peut se servir de cette proposition, de la maniere suivante, pour résoudre ce problême.*

Un rectangle DB * a 35 pieds de diagonale, & sa longueur AB surpasse de sept pieds sa largeur BC. Combien cette longueur & cette largeur ont-elles de pieds, chacune ? Fig. 20.

SOLUTION. Puisque [H] *le côté AB surpasse de 7 pieds le côté BC, on prend sur le côté AB une partie AE de 7 pieds, & le reste EB est égal au côté BC; après quoi, l'on raisonne de cette maniere:*

La ligne AB est divisée en deux parties AE & EB. Ainsi (n), *le quarré de la moitié AF de la partie AE, (lequel est de* 12 $\frac{1}{4}$ *pieds* [C]), *avec celui de la ligne FB, (qui est inconnu), doit être égal à la moitié de la somme des quarrés de la ligne AB & de la partie EB; c'est-à-dire* [C], *à la moitié de la somme des quarrés des côtés AB & BC; & par conséquent, à la moitié du quarré de la diagonale AC* (n), *puisque le triangle ABC est rectangle en B* [H]. *Mais* [H], *la moitié de ce quarré est de* 612 $\frac{1}{2}$ *pieds: donc, le quarré qui étoit inconnu, est de* 600 $\frac{1}{4}$ *pieds; & par conséquent, la ligne FB est de* 24 $\frac{1}{2}$ *pieds. Or,*

N. 200. N. 171.

puisque cette ligne est de 24 $\frac{1}{2}$ pieds, & que la ligne AF est de 3 $\frac{1}{2}$ pieds, le côté AB est de 28 pieds, & le côté BC de 21.

Par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION XI.

PROBLÊME.

203. *Diviser une ligne droite en deux parties, qui soient telles que le rectangle de cette ligne & de la plus petite de ces deux parties, soit égal au quarré de la plus grande.*

Fig. 21. IL faut diviser la ligne droite AB * en deux parties, qui soient telles que le rectangle de cette ligne & de la plus petite de ces deux parties, soit égal au quarré de la plus grande.

N. 95. *Const.* Du point A, élevez (n) à la ligne AB une perpendiculaire indéfinie
N. 81. FD. Prenez (n) sur cette perpendiculaire, la partie AE égale à la moitié de cette ligne AB; & la partie EF égale à la distance du point E au point B. Enfin, pre-
N. 81. nez (n) sur la ligne AB, la partie AH égale à la ligne AF. Cette ligne AB sera divisée comme il est demandé.

Pour la démonstration, faites la partie

AD égale à la ligne AB ; & achevez le quarré AC (n). Par le point H, tirez la N. 170.
parallele GI à la ligne FD (n) ; & par le N. 133.
point F, la parallele FG à la ligne AB. Enfin, tirez du point E au point B la ligne droite EB.

Démonst. La ligne DF est l'un des côtés du rectangle DG ; & son autre côté FG est égal à la partie AF de cette même ligne, puisque le quadrilatere AG est le quarré de la partie AH [c]. Donc, ce rectangle est celui de la ligne DF & de sa partie AF.

Ainsi, puisque la ligne EA est la moitié de l'autre partie DA de cette même ligne DF [c], le rectangle DG, avec le quarré de la ligne EA, est égal au quarré de la ligne EF (n) ; & par conséquent, N. 190.
à celui de la ligne EB, puisque les lignes EF & EB sont égales [c]. Mais le quarré AC de la ligne AB, avec celui de la ligne EA, est aussi égal au quarré de cette même ligne EB (n), puisque le triangle N. 171.
EAB est rectangle en A [c]. Donc (n), N. 62.
le rectangle DG, avec le quarré de la ligne EA, est égal au quarré AC de la ligne AB, plus celui de la ligne EA. Par conséquent, le rectangle DG est égal au quarré AC (n). N. 64.

Or, puisque ce rectangle & ce quarré,

qui ont la partie DH de commun, sont égaux, l'autre partie AG du premier est égale a l'autre partie HC du second; c'est-à-dire, au rectangle de la ligne AB & de sa partie HB.

Donc, C. Q. F. F.

PROPOSITION XII.

THÉORÊME.

204. *Dans un triangle obtusangle, le quarré du côté opposé à l'angle obtus, est égal aux quarrés des deux autres côtés, plus deux rectangles faits chacun de l'un quelconque de ces autres côtés, & de son prolongement jusqu'à la perpendiculaire.*

Fig. 22. DANS le triangle ABC* dont l'angle C est obtus; le quarré du côté AB est égal aux quarrés des autres côtés AC & CB, plus deux rectangles faits chacun de l'un quelconque de ces autres côtés, & de son prolongement jusqu'à la perpendiculaire; par exemple, du côté AC & de son prolongement CD.

N. 96. *Const.* Du point B, abaissez (n) la perpendiculaire BD au côté AC, prolongé autant qu'il le sera nécessaire.

Démonſt. La ligne AD eſt diviſée en deux parties AC & CD. Ainſi (n), les N. 184.
quarrés de ces deux parties AC & CD, avec deux rectangles faits chacun de ces deux mêmes parties, ſont égaux au quarré de cette ligne AD.

Donc (n), les quarrés de ces deux par- N. 63.
ties, avec les deux rectangles faits chacun de ces deux mêmes parties, & le quarré de la perpendiculaire B D, ſont égaux au quarré de la ligne AD, plus celui de la même perpendiculaire BD.

Mais, à cauſe des triangles CDB & ADB, qui ſont rectangles l'un & l'autre en D [c], le quarré de la partie C D, avec celui de la perpendiculaire BD, eſt égal au quarré du côté CB (n) : & le N. 171.
quarré de la ligne AD, avec celui de la même perpendiculaire BD, eſt égal au quarré du côté AB (n). N. 171.

Donc, le quarré du côté AB eſt égal aux quarrés des côtés AC & CB, plus deux rectangles faits chacun du côté AC & de ſon prolongement CD.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

USAGE.

205. *On peut ſe ſervir de cette propoſition, de la maniere ſuivante, pour réſoudre ce problême.*

Fig. 22. Les côtés AB*, AC & CB du triangle ABC dont l'angle C est obtus, sont, l'un de 20 toises, l'autre de 11, & le dernier de 13. Combien la perpendiculaire abaissée de l'un des autres angles au côté opposé (par exemple, de l'angle B au côté AC) en contient-elle ?

SOLUTION. L'angle C est obtus [H].
N. 204. *Ainsi* (n), *les quarrés des côtés AC & CB, (qui sont de 290 toises* [H]), *avec deux rectangles faits chacun des lignes AC & CD, (lesquels sont inconnus), doivent être égaux au quarré du côté AB, (lequel est de 400 toises* [H]). *Donc, ces deux rectangles qui étoient inconnus sont de 110 toises; & par conséquent, chacun de ces rectangles est de 55. Mais, puisque le rectangle des lignes AC & CD est de 55 toises, & que la ligne AC est de 11 toises* [H], *55 sont le produit*
N. 149. *de la ligne CD multipliée par 11* (n); *& par conséquent cette ligne est de 5 toises. Or, puisque dans le triangle CDB qui est rectangle en D* [H], *on connoît l'hypothénuse CB de 13 toises, avec le côté CD de 5, on*
N. 175. *trouvera* (n) *que le côté BD, qui est la perpendiculaire demandée, en contient 12.*

Par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION XIII.

THÉORÊME.

206. *Dans un triangle quelconque, le quarré du côté opposé à l'un des angles aigus, avec deux rectangles faits chacun de l'un quelconque des autres côtés & de la partie de cet autre côté comprise entre cet angle aigu & la perpendiculaire, est égal aux quarrés des deux autres côtés.*

DANS le triangle ABC *, le quarré du côté, par exemple AB, opposé à l'angle aigu C, avec deux rectangles faits chacun, par exemple du côté AC, & de la partie DC de ce côté comprise entre cet angle aigu C & la perpendiculaire BD, est égal aux quarrés des deux autres côtés AC & CB. Fig. 23.

Const. Du point B, abaissez (n) la perpendiculaire BD au côté AC. N. 96.

Démonst. La ligne AC est divisée en deux parties AD & DC. Ainsi (n), le quarré de la partie AD, avec deux rectangles faits chacun de cette ligne AC & de son autre partie DC, est égal au quarré de cette même ligne AC, plus celui de cette autre partie DC. N. 194.

N. 63. Donc (n), le quarré de la partie AD, avec deux rectangles faits chacun de la ligne AC & de la partie DC, & le quarré de la perpendiculaire BD, eſt égal aux quarrés de la ligne AC, de la partie DC, & de la perpendiculaire BD.

Mais, à cauſe des triangles ADB & CDB, qui ſont rectangles l'un & l'autre en D [c], le quarré de la partie AD, avec celui de la perpendiculaire BD, eſt
N. 171. égal au quarré du côté AB (n) : & le quarré de la partie DC, avec celui de la même perpendiculaire BD, eſt égal au
N. 171. quarré du côté CB (n).

Donc, le quarré du côté AB, avec deux rectangles faits chacun du côté AC & de ſa partie DC, eſt égal aux quarrés des côtés AC & CB.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

USAGE.

207. *On peut ſe ſervir de cette propoſition, de la maniere ſuivante, pour réſoudre ce problême.*

Fig. 23. Les côtés AB *, AC & CB du triangle ABC, dont l'angle C eſt aigu, ſont, l'un de 45 toiſes ; l'autre, de 42 ; & le dernier, de 39. Combien la perpendiculaire abaiſſée de l'un des autres angles au côté

opposé, (par exemple, de l'angle B au côté AC), en contient-elle?

SOLUTION. *L'angle C est aigu* [H]. *Ainsi* (n), *le quarré du côté AB, (qui est* N. 206.
de 2025 *toises* [H]), *avec deux rectangles faits chacun des lignes AC & DC, (lesquels sont inconnus), doit être égal aux quarrés des côtés AC & CB, (qui sont de* 3285 *toises* [H]. *Donc, ces deux rectangles qui étoient inconnus, sont de* 1260 *toises; & par conséquent, chacun de ces rectangles est de* 630. *Mais, puisque le rectangle des lignes AC & DC est de* 630 *toises, & que la ligne AC est de* 42 *toises* [H], 630 *sont le produit de la ligne DC multipliée par* 42 (n); *& par conséquent,* N. 149.
cette ligne est de 15 *toises. Or, puisque dans le triangle DBC qui* [H] *est rectangle en D, on connoît l'hypothénuse CB de* 39 *toises, avec le côté DC de* 15, *on trouvera* (n) *que le côté BD, qui est la per-* N. 175.
pendiculaire demandée, en contient 36.

Par conséquent, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

208. *Cette proposition & la précédente peuvent être fort utiles dans le toisé, & dans l'arpentage; parce qu'il est bien plus facile, dans la pratique, de mesurer les*

trois côtés d'un triangle, que d'abaisser une perpendiculaire de l'un des angles à l'un des côtés.

PROPOSITION XIV.

PROBLÊME.

209. *Décrire un quarré, dont la surface soit égale à celle d'une figure rectiligne donnée.*

IL faut décrire un quarré qui soit égal
Fig. 24. à la figure rectiligne A*.
N. 167. *Const.* Décrivez (n) un rectangle BD égal à la figure proposée A. Prolongez l'un des côtés de ce rectangle, par exemple le côté BC, jusqu'à ce que le prolongement CF soit égal à l'autre côté CD.
N. 93. Divisez (n) la ligne BF en deux parties égales BG & GF. Du point G pris pour centre, & avec l'une de ces parties égales prise pour rayon, décrivez un demi-cercle BHF. Enfin, prolongez le côté CD, jusqu'à ce qu'il rencontre à un point H la circonférence de ce demi-cercle. Le prolongement CH sera le côté du quarré demandé.

Pour la démonstration, tirez du point G au point H, la ligne droite GH.

Démonst. La ligne BF est divisée en deux parties BC & CF, & le point G est son milieu [c]. Ainsi (n), le rectangle de N. 187.
ces deux parties, (c'est-à-dire le rectangle BD, puisque les lignes CF & CD sont égales [c]), avec le quarré de la ligne GC, est égal au quarré de la ligne GF; & par conséquent, à celui de la ligne GH, puisque les lignes GF & GH sont égales (n). N. 35.

Mais, les quarrés des lignes GC & CH sont aussi égaux au quarré de la même ligne GH (n); puisque le triangle GCH N. 171.
est rectangle en C [c]. Donc (n), le N. 62.
rectangle BD, avec le quarré de la ligne GC, est égal aux quarrés des lignes GC & CH; & par conséquent, ce rectangle est égal au quarré de la ligne CH (n). N. 64.

Or, ce même rectangle est aussi égal à la figure rectiligne A [c]. Donc, le quarré de la ligne CH est égal à cette figure (n). N. 62.

Par conséquent, C. Q. F. F.





LES ÉLÉMENS D'EUCLIDE.

LIVRE TROISIEME.

EUCLIDE, après avoir démontré dans les deux premiers Livres les propoſitions fondamentales de la Géométrie, examine dans celui-ci les propriétés des lignes droites qui vont ſe terminer à la circonférence d'un cercle. Il conſidere enſuite la maniere dont les circonférences des cercles peuvent ou ſe toucher, ou ſe couper. Il détermine auſſi ce qui doit être la meſure des angles qui ſont formés dans un cercle, par des lignes droites tirées chacune d'un même point de ſa circonférence. Enfin, il réſoud quelques problêmes qui concernent encore le cercle; & démontre dans les dernieres propoſitions, les propriétés caractériſtiques de cette figure.

DÉFINITIONS.

210. ON nomme *cercles égaux*, ceux dont les diametres, ou dont les rayons, sont égaux.

211. On dit qu'une ligne droite *touche* une figure, lorsqu'elle à un point de commun avec la circonférence de cette figure; & qu'étant prolongée de part & d'autre, elle ne peut avoir que ce seul point de commun avec cette même figure.

Fig. 1. *La ligne AB* * touche *le cercle X.*

212. On nomme *Tangente*, une ligne droite qui touche une figure.

Fig. 1. *La ligne AB* * *est une* tangente *au cercle X.*

213. On nomme *Sécante*, une ligne droite qui, étant prolongée, s'il est nécessaire, a plus d'un point de commun avec la circonférence d'une figure.

Fig. 1. *La ligne CD* * *est une* sécante *du cercle X.*

214. On dit que des figures se *touchent*, lorsque leurs circonférences ont un point

de commun, & ne peuvent avoir que ce ſeul point de commun.

215. On dit que des lignes droites ſont *également éloignées* d'un certain point, lorſque les perpendiculaires qui ſont tirées de ce point à chacune de ces lignes, ſont égales.

*Les lignes AB * & CD ſont* également *éloignées du centre K du cercle X, ſi les perpendiculaires KG & KH ſont égales.* Fig. 2.

216. On nomme *Corde*, une ligne droite qui eſt tirée de l'une des extrémités d'un arc de cercle à l'autre extrémité du même arc.

La ligne AC eſt la* corde *de l'arc ABC.* Fig. 3.

217. On dit d'une corde, qu'elle *tend* l'arc dont elle eſt la corde.

*La corde AC** tend *l'arc ABC.* Fig. 3.

218. On nomme *Ordonnée* au diametre d'un cercle, une demi-corde perpendiculaire à ce diametre.

*La perpendiculaire CD * au diametre AB, eſt une* ordonnée *à ce diametre.* Fig. 5.

219. On nomme *Abciſſes*, les parties en leſquelles un diametre eſt diviſé par une ordonnée.

Fig. 5. *Les parties AC * & CB du diametre AB, ſont les* abciſſes *de ce diametre.*

220. On nomme *Segment* de cercle, une figure plane qui eſt terminée par un arc de cercle & par une corde †.

Fig. 3. *La figure ABC * eſt un* ſegment *de cercle.*

221. On nomme *Angle du ſegment*, un angle qui eſt formé par la corde qui tend l'arc de ce ſegment; & par une tangente à ce même arc, tirée de l'une de ſes extrémités.

Fig. 4. *L'angle ABC * eſt l'angle du* ſegment *CDB.*

222. On dit d'un angle, qu'il eſt *inſcrit dans* un ſegment, ou ſeulement, qu'il *eſt* dans un ſegment, lorſque ſon ſommet eſt dans l'arc de ce ſegment; & que ſes côtés paſſent par les extrémités de cet arc.

Fig. 4. *L'angle E * eſt* dans *le ſegment CEB.*

223. On nomme *Secteur* de cercle, une figure plane qui eſt terminée par un arc de cercle; & par deux rayons de ce même cercle.

† *Segment* eſt un nom qui exprime que la choſe à laquelle on le donne a été coupée d'une autre.

Les

*Les figures ABCD * & ABCE sont* Fig. 6.
chacune un secteur *de cercle.*

224. Enfin, on dit que des segmens de cercles sont *semblables*, lorsque les angles qui sont inscrits dans ces segmens, chacun dans chacun, sont égaux.

*Les segmens ABC * & DEF sont* sem- Fig. 7.
blables, *si les angles B & E qui sont inscrits, l'un dans le segment ABC, & l'autre dans le segment DEF, sont égaux.*

PROPOSITION I.

PROBLÊME.

225. *Trouver le centre d'un cercle donné.*

IL faut trouver le centre du cercle X*. Fig. 8.

Const. Tirez dans le cercle X une corde AB, à volonté. Divisez (n) cette corde N. 93.
en deux parties égales AE & EB. Du point E, élevez à cette même corde (n) N. 95.
la perpendiculaire CD, qui se termine de part & d'autre à la circonférence. Enfin (n), divisez aussi cette perpendicu- N. 93.
laire en deux parties égales CF & FD. Le point F sera le centre demandé.

Pour la démonstration. Du point G pris à volonté hors de la perpendiculaire CD,

tirez aux points A, E & B, les lignes droites GA, GE & GB.

Démonst. Si le centre du cercle X étoit un point quelconque G hors de la perpendiculaire CD, les triangles AGE & BGE, qui ont le côté AE égal au côté BE [c], & le côté GE de commun, auroient aussi
N. 35. le côté GA égal au côté GB (n). Ainsi
N. 88. (n), l'angle GEA seroit égal à l'angle
N. 19. GEB; & par conséquent (n), la ligne GE seroit perpendiculaire à la ligne AB.
N. 21. Mais (n), la ligne GE n'est point perpendiculaire à la ligne AB; puisque l'angle GEB n'est qu'une partie de l'angle CEB, qui est un angle droit [c]. Donc, le point G n'est pas le centre du cercle X.

Or, la même démonstration subsiste, à quelque point que l'on prenne le point G; pourvu que ce soit hors de la perpendiculaire CD. Donc, le centre demandé n'est pas hors de cette perpendiculaire.

Enfin, puisque le centre demandé est dans cette perpendiculaire, & que [c] le point F est le seul point de cette ligne qui soit également éloigné des points C & D de la
N. 32. circonférence, le point F est ce centre (n).

Par conséquent, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

226. Il suit de la démonstration de ce

problême, que *ſi dans le cercle une corde en coupe une autre perpendiculairement, & par le milieu, cette premiere corde eſt le diametre de ce cercle.*

PROPOSITION II.

THÉORÊME.

227. *Une ligne droite qui a plus d'un point de commun avec la circonférence d'un cercle, paſſe dans ce cercle.*

LA ligne droite AB * qui a les points A & B de communs avec la circonférence du cercle X, paſſe dans ce cercle. Fig. 9.

Conſt. Prenez ſur la ligne AB le point D, à volonté; mais qui ſoit cependant entre les points A & B. Tirez enſuite du centre C aux points A, D & B, les lignes droites CA, CD & CB.

Démonſt. Dans le triangle ACD, l'angle extérieur CDB eſt plus grand (n) que N. 102. ſon oppoſé intérieur A. Or, l'angle B eſt égal à l'angle A (n); puiſque les côtés CA N. 84. & CB du triangle ACB ſont égaux (n). N. 35. Donc, l'angle CDB eſt plus grand que l'angle B.

Mais puiſque, dans le triangle DCB,

l'angle CDB eſt plus grand que l'angle B, le côté CB eſt auſſi plus grand que le côté
N. 111. CD (n). Donc, l'extrémité D de ce dernier côté eſt dans le cercle X. Par conſéquent, puiſque [c] la ligne AB paſſe par cette extrémité, elle paſſe dans ce cercle,

Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION III.

THÉORÊME.

228. *Si une ligne droite qui paſſe par le centre d'un cercle, diviſe en deux parties égales une corde qui n'y paſſe point, elle eſt perpendiculaire à cette corde; & ſi elle eſt perpendiculaire à cette corde, elle la diviſe en deux parties égales.*

PREMIÉREMENT. La ligne droite
Fig. 10. CD*, qui paſſe par le centre F du cercle X, & qui diviſe en deux parties égales AE & EB, la corde AB qui n'y paſſe point, eſt perpendiculaire à cette corde.

Conſt. Tirez du centre F aux points A & B, les lignes droites FA & FB.

Démonſt. Dans les triangles AFE & BFE, le côté AE eſt égal au côté EB [H],

le côté FA au côté FB (n), & le côté N. 35.
FE eſt commun. Donc (n), l'angle CEA N. 88.
eſt égal à l'angle CEB ; & par conſéquent (n), la ligne CD eſt perpendiculaire à la corde AB. N. 19.

SECONDEMENT. La ligne droite CD * qui paſſe par le centre F du cercle X, & eſt perpendiculaire a la corde AB qui n'y paſſe point, diviſe cette corde en deux parties égales AE & EB. Fig. 10.

Conſt. La même que la précédente.

Démonſt. Les triangles AEF & BEF ſont rectangles l'un & l'autre en E [H].
Ainſi (n), les quarrés des côtés AE & N. 171.
EF ſont égaux au quarré de l'hypothénuſe AF ; & ceux des côtés EB & EF le ſont à celui de l'hypothénuſe BF.

Mais, ces hypothénuſes ſont égales (n). N. 35.
Donc, les quarrés des côtés AE & EF ſont égaux à ceux des côtés EB & EF
(n) ; & par conſéquent le quarré du côté N. 61.
AE eſt égal à celui du côté EB (n). Or, N. 64.
puiſque les quarrés des côtés AE & EB ſont égaux, ces côtés le ſont auſſi.

Par conſéquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION IV.

THÉORÊME.

229. *Deux cordes qui ſe coupent à un point qui n'eſt pas le centre du cercle, ne ſe diviſent point chacune en deux parties égales.*

Fig. 11. LES cordes AB * & CD qui ſe coupent au point F qui n'eſt pas le centre du cercle X, ne ſe diviſent point chacune en deux parties égales.

Conſt. Tirez du centre E au point d'interſection F, la ligne droite EF.

Démonſt. Si le point F étoit le milieu de chacune des cordes AB & CD, la ligne EF qui [c] paſſe par le centre E, ſeroit perpendiculaire à chacune de ces
N. 228. cordes (n). Ainſi, chaque angle EFB &
N. 21. EFD ſeroit un angle droit (n); & par conſéquent, ces deux angles ſeroient égaux.

N. 72. Or (n), ces deux angles ne ſont point égaux, puiſque le ſecond n'eſt qu'une partie du premier. Donc, le point F n'eſt pas le milieu de chacune des cordes AB & CD.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION V.

THÉORÊME.

230. *Les cercles dont les circonférences se coupent, n'ont point le même centre.*

LES cercles ABC * & DCB, dont les circonférences se coupent aux points B & C, n'ont point le même centre. Fig. 12.

Démonst. Dans le cercle, le centre est également éloigné de tous les points de la circonférence (n). Ainsi, les circonférences des cercles qui ont le même centre, sont paralleles (n); & par conséquent (n), elles ne se coupent point. N. 32. N. 35. N. 56.

Or, les circonférences des cercles ABC & BDC ne sont point paralleles; puisque [H] elles se coupent aux points B & C. Donc, ces cercles n'ont point le même centre.

Par conséquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION VI.

THÉORÊME.

231. *Les cercles dont les circonférences ſe touchent, n'ont point le même centre.*

Fig. 13. LES cercles ABC * & DBE, dont les circonférences ſe touchent au point B, n'ont point le même centre.

Démonſt. Dans le cercle, le centre eſt également éloigné de tous les points de
N. 32. la circonférence (n). Ainſi les circonfé-rences des cercles qui ont le même cen-
N. 35. tre, ſont paralleles (n); & par conſé-
N. 56. quent (n), elles ne ſe touchent point.

Or, les circonférences des cercles ABC & DBE ne ſont point paralleles ; puiſque [H] elles ſe touchent au point B. Donc, ces cercles n'ont point le même centre.

Par conſéquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION VII.

THÉORÊME.

232. *Si d'un point pris dans un cercle, mais qui n'en eſt pas le centre, on tire à la circonférence pluſieurs lignes droites :* Premiérement, *celle qui paſſera par le centre ſera la plus grande ; & celle qui y paſſeroit, ſi elle étoit prolongée, ſera la plus petite :* Secondement, *celles qui ſeront plus près du centre, ſeront plus grandes que celles qui en ſeront plus éloignées :* Troiſiémement, *enfin, il pourra y en avoir deux égales ; mais il ne pourra y en avoir plus de deux.*

PREMIÉREMENT. De toutes les lignes droites qu'il eſt poſſible de tirer à la circonférence du cercle X*, du point A pris dans ce cercle, mais qui n'en eſt pas le centre, la ligne AEB qui paſſe par le centre E, eſt la plus grande : & la ligne AC qui y paſſeroit ſi elle étoit prolongée, eſt la plus petite. Fig. 54.

Conſt. Du point D pris à volonté ſur la circonférence, tirez au centre E & au point A, les lignes droites DE & DA.

Démonst. Premiérement. Dans le triangle AED, la somme des côtés AE & ED
N. 114. est plus grande que le côté AD (n). Or,
N. 61. la ligne AEB est égale à cette somme (n), puisque les lignes EB & ED sont égales
N. 35. (n). Donc, la ligne AEB est plus grande que le côté AD.

Secondement. Dans le triangle AE*d*, le côté E*d* est plus petit que la somme des
N. 114. autres côtés EA & A*d* (n). Or, la ligne
N. 35. EAC est égale à ce côté E*d* (n). Donc cette ligne est plus petite que la somme de ces autres côtés. Par conséquent, si l'on retranche la même ligne EA, & de cette ligne EAC & de cette somme, le reste AC de cette derniere ligne sera plus petit que le reste A*d* de cette somme.

Or, la même démonstration subsiste, à quelque point de la circonférence que l'on prenne le point D. Donc, de toutes les lignes droites qu'il est possible de tirer du point A à cette circonférence, la ligne AEB est la plus grande; & la ligne AC la plus petite.

Par conséquent, C. Q. F. 1° D.

SECONDEMENT. Des deux lignes
Fig. 15. droites AC* & AD qui sont tirées à la circonférence du cercle X, d'un point A pris dans ce cercle, mais qui n'en est pas

le centre, la ligne AC qui eſt la plus proche du centre E, eſt la plus grande.

Conſt. Tirez du centre E aux points C & D, les lignes droites EC & ED.

Démonſt. Dans les triangles AEC & AED, l'angle AEC eſt plus grand que l'angle AED (n), le côté EC eſt égal au N. 72.
côté ED (n), & le côté EA eſt commun. N. 35.
Donc (n), le côté AC eſt plus grand que N. 121.
le côté AD.

Par conſéquent, C. Q. F. 2° D.

TROISIÉMEMENT. Enfin, d'un point A* pris dans le cercle X, mais qui n'en Fig. 16.
eſt pas le centre, on peut tirer à la circonférence deux lignes droites égales ; mais on ne peut en tirer plus de deux.

Conſt. Tirez du point A par le centre E, la ligne droite AEB. Du point C pris à volonté ſur la circonférence, tirez aux points A & E, les lignes droites CA & CE. Décrivez ſur la ligne AEB (n), l'an- N. 119.
gle AED qui ait le point E pour ſommet, & ſoit égal à l'angle AEC. Enfin, tirez du point A au point D, la ligne droite AD.

Démonſt. Premiérement. Dans les triangles ADE & ACE, l'angle AED eſt égal à l'angle AEC (c), le côté ED au côté EC (n), & le côté EA eſt commun. N. 35.
Donc, le côté AD eſt égal au côté AC (n). N. 82.

Par conféquent, on peut tirer du point A à la circonférence, deux lignes droites égales.

Secondement. Toute ligne droite tirée du point A à la circonférence, qui fera plus près du centre E que ne l'eft la ligne AD, fera plus grande que cette ligne AD : & toute ligne droite tirée du même point A à la même circonférence, qui fera plus éloignée du centre E que ne l'eft la ligne AD, fera plus petite que cette même ligne AD.

Donc, la ligne AD eft la feule ligne droite égale à la ligne AC, qu'il foit poffible de tirer du point A à la circonférence. Par conféquent, on ne peut tirer de ce point à la circonférence, plus de deux lignes droites égales.

Or, la même démonftration fubfifte, à quelque point de la circonférence que l'on prenne le point C.

Donc, C. Q. F. 3° D.



PROPOSITION VIII.

THÉORÊME.

233. *Si d'un point pris hors d'un cercle, on tire à la circonférence plusieurs lignes droites :* Premiérement, *celle qui passera par le centre sera la plus grande ; & celle qui y passeroit, si elle étoit prolongée, sera la plus petite :* Secondement, *si elles traversent le cercle, celles qui seront plus près du centre, seront plus grandes que celles qui en seront plus éloignées ; mais si elles n'entrent point dans le cercle, celles qui seront plus près du centre, seront au contraire plus petites que celles qui en seront plus éloignées :* Troisiémement, *enfin, deux de celles qui traverseront le cercle pourront être égales, & deux de celles qui n'y entreront point pourront aussi l'être ; mais, des unes comme des autres, il ne pourra y en avoir plus de deux.*

PREMIÉREMENT. De toutes les lignes droites qu'il est possible de tirer à la circonférence du cercle X *, d'un point A pris hors de ce cercle, la ligne AEC qui passe par le centre E, est la Fig. 17.

plus grande : & la ligne AB qui y passeroit, si elle étoit prolongée, est la plus petite.

Const. Du point D pris à volonté sur la circonférence, tirez au centre E & au point A, les lignes droites DE & DA.

Démonst. Premiérement. Dans le triangle AED, la somme des côtés AE & ED
N. 114. est plus grande que le côté AD (n). Or,
N. 61. la ligne AEC est égale à cette somme (n), puisque les lignes EC & ED sont égales
N. 35. (n). Donc, la ligne AEC est plus grande que le côté AD.

Secondement. Dans le triangle AE*d*, le côté EBA est plus petit que la somme
N. 114. des autres côtés E*d* & *d*A (n). Donc, si du côté EBA on retranche le rayon EB, & de la somme des côtés E*d* & *d*A le rayon E*d*, le reste AB de ce côté sera plus petit que le reste A*d* de cette somme.

Or, la même démonstration subsiste, à quelque point de la circonférence que l'on prenne le point D. Donc, de toutes les lignes droites qu'il est possible de tirer du point A à cette circonférence, la ligne AEC est la plus grande ; & la ligne AB la plus petite.

Par conséquent, C. Q. F. 1° D.

SECONDEMENT. Des deux lignes droites

A F * & A D qui ſont tirées à la circon- Fig. 18.
férence du cercle X, d'un point A pris hors de ce cercle, & qui le traverſent, la ligne AF qui eſt la plus proche du centre E, eſt la plus grande.

Mais, des deux lignes AF * & AD qui Fig. 19.
ſont tirées à la circonférence du cercle X, d'un point A pris hors de ce cercle, & qui n'y entrent point, la ligne AF qui eſt la plus éloignée du centre E, eſt la plus grande.

Conſt. Du centre E *, tirez aux points Fig. 18. & 19.
F & D, les lignes droites EF & ED.

Démonſt. Dans les triangles AEF & AED, l'angle AEF eſt plus grand que l'angle AED (n), le côté EF eſt égal au N. 72.
côté ED (n), & le côté AE, eſt commun. N. 35.
Donc (n), le côté AF eſt plus grand que N. 121.
le côté AD.

Par conſéquent, C. Q. F. 2° D.

TROISIÉMEMENT. Enfin, d'un point A * Fig. 20. & 21.
pris hors du cercle X, on peut tirer à la circonférence deux lignes droites égales qui traverſent ce cercle; & deux lignes droites égales qui n'y entrent point; mais des unes comme des autres, on ne peut en tirer plus de deux.

Conſt. Tirez du point A au centre E, la ligne droite AE. Du point C, pris à

volonté ſur la circonférence, tirez aux points A & E, les lignes droites CA &
N. 119. CE. Décrivez ſur la ligne AE (n), l'angle AED qui ait le point E pour ſommet, & ſoit égal à l'angle AEC. Enfin, tirez du point A au point D, la ligne droite AD.

Démonſt. Premiérement. Dans les triangles AED & AEC, l'angle AED eſt égal à l'angle AEC [c], le côté ED au côté
N. 35. EC (n), & le côté AE eſt commun. Donc
N. 82. (n), le côté AD eſt égal au côté AC.

Par conſéquent, on peut tirer du point A à la circonférence, deux lignes droites
Fig. 20. égales AC * & AD qui traverſent le cer-
Fig. 21. cle; & deux lignes droites égales AC * & AD qui n'y entrent point.

Secondement. Toute ligne droite tirée
Fig. 20 du point A* à la circonférence, qui ſera
& 21. plus près du centre E que ne l'eſt la ligne AD, ſera plus grande que cette ligne AD *dans le premier cas;* & plus petite, *dans le ſecond:* & toute ligne droite tirée du même point A à la circonférence, qui ſera plus éloignée du centre E que ne l'eſt la ligne AD, ſera plus petite que cette même ligne AD, *dans le premier cas;* & plus grande, *dans le ſecond.* Donc, *dans l'un comme dans l'autre cas*, la ligne AD eſt la ſeule ligne droite égale à la ligne AC,

qu'il ſoit poſſible de tirer du point A à la circonférence.

Par conſéquent, *dans l'un comme dans l'autre cas*, on ne peut tirer de ce point à la circonférence, plus de deux lignes droites égales.

Or, la même démonſtration ſubſiſte, à quelque point de la circonférence que l'on prenne le point C.

Donc C. Q. F. 3° D.

PROPOSITION IX.

THÉORÊME.

234. *Un point duquel on peut tirer à la circonférence d'un cercle plus de deux lignes droites égales, eſt le centre de ce cercle.*

SI les lignes droites AB*, AC & AD qui ſont tirées chacune du même point A à la circonférence du cercle X, ſont égales, ce point eſt le centre de ce cercle. Fig. 22.

Démonſt. D'un point qui n'eſt pas le centre d'un cercle, on ne peut (n) tirer à la circonférence plus de deux lignes droites égales. Or, du point A on peut tirer à la circonférence du cercle X plus de deux N. 232.

lignes droites égales; puisque les trois lignes AB, AC & AD le sont [H]. Donc, ce point est le centre de ce cercle.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION X.

THÉORÊME.

235. *La circonférence d'un cercle ne peut couper à plus de deux points, celle d'un autre cercle.*

Fig. 23. LA circonférence du cercle ABC * qui coupe aux deux points B & C celle du cercle BDC, ne peut la couper à un troisieme point.

Démonst. Si la circonférence du cercle ABC pouvoit couper à trois points celle du cercle BDC, ces deux circonférences pourroient avoir trois points de commun. Ainsi, les trois lignes droites que l'on pourroit tirer du centre E du cercle ABC à ces trois points, se termineroient toutes trois & à la circonférence du cercle ABC, & à celle du cercle BDC.

Mais si ces lignes se terminoient toutes trois à la circonférence du cercle ABC,
N. 35. elles seroient égales (n); puisqu'elles se-

roient des rayons de ce cercle. Donc, du point E, (qui (n) n'eſt pas le centre du N. 230.
cercle BDC, puiſqu'il eſt celui du cercle ABC), on pourroit tirer à la circonférence de ce cercle BDC trois lignes droites égales.

Or (n), cela n'eſt point poſſible. Donc, N. 232.
la circonférence du cercle ABC ne peut couper à plus de deux points celle du cercle BDC.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XI.

THÉORÊME.

236. *Si la circonférence d'un cercle touche intérieurement celle d'un autre cercle; le point auquel elle la touche, eſt dans la même ligne droite que les centres de ces deux cercles.*

LE point B* auquel la circonférence du Fig. 24.
cercle DBE touche intérieurement celle du cercle ABC, le centre H du cercle ABC, & le centre du cercle DBE, ſont chacun dans une même ligne droite.

Conſt. Tirez du centre H du cercle ABC au point du contact B, la ligne

droite HB. Du point I, pris à volonté dans le cercle DBE, mais cependant hors de la ligne HB, tirez au point B, la ligne droite IB. Enfin, tirez du point H par le point I, la ligne droite HIC.

Démonst. Dans le triangle HIB, la somme des côtés HI & IB est plus grande
N. 114. que le côté HB (n). Or, ce côté HB est
N. 35. égal à la ligne HC (n); & cette ligne est
N. 72. plus grande que la ligne HE (n). Donc, la somme des côtés HI & IB est plus grande que la ligne HE. Ainsi, si & de cette somme & de cette ligne on retranche la même ligne HI, le reste IB de cette somme sera plus grand que le reste IE de cette li-
N. 66. gne (n). Par conséquent, le point I n'est
N. 32. pas le centre du cercle DBE (n).

Or, la même démonstration subsiste, à quelque point du cercle DBE que l'on prenne le point I, pourvu que ce soit
N. 32. hors de la ligne HB. Donc (n), aucun point du cercle DBE, pris hors de la ligne HB, ne peut être le centre de ce cercle. Par conséquent, ce centre est dans cette ligne.

Mais [c], le point du contact B, & le centre H du cercle ABC sont aussi dans cette même ligne. Donc, le point de contact B, le centre H du cercle ABC, & le

centre du cercle DBE sont chacun dans la ligne droite HB.

Par conséquent C. Q. F. D.

PROPOSITION XII.

THÉORÊME.

237. *Si la circonférence d'un cercle touche extérieurement celle d'un autre cercle ; le point auquel elle la touche, est dans la même ligne droite que les centres de ces deux cercles.*

LE point C * auquel la circonférence du cercle X touche extérieurement celle du cercle Y, le centre A du cercle X, & le centre du cercle Y, sont chacun dans une même ligne droite. Fig. 25.

Const. Tirez du centre A du cercle X par le point de contact C, la ligne droite indéfinie ACB. Du point D pris à volonté dans le cercle Y, mais cependant hors de la ligne ACB, tirez aux points A & C, les lignes droites DA & DC.

Démonst. Dans le triangle ACD, la somme des côtés AC & CD est plus grande que le côté AD (n). Donc, si de N. 114. la somme de ces côtés AC & CD on re-

tranche le rayon AC, & du côté AD le rayon AE, le reſte DC de cette ſomme ſera plus grand que le reſte DE de ce côté.
N. 72. Mais (n), ce reſte DE eſt plus grand que la ligne DF. Donc, la ligne DC eſt auſſi plus grande que la ligne DF; & par con-
N. 32. ſéquent (n), le point D n'eſt pas le centre du cercle Y.

Or, la même démonſtration ſubſiſte, à quelque point du cercle Y que l'on prenne le point D, pourvu que ce ſoit hors de la
N. 32. ligne ACB. Donc (n), aucun point du cercle Y, pris hors de la ligne ACB, ne peut être le centre de ce cercle. Par conſéquent, ce centre eſt dans cette ligne.

Mais [c], le point de contact C, & le centre A du cercle X, ſont auſſi dans cette même ligne. Donc, le point de contact C, le centre A du cercle X, & le centre du cercle Y, ſont chacun dans la ligne droite ACB.

Par conſéquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION XIII.

THÉORÊME.

238. *Si la circonférence d'un cercle touche intérieurement, ou extérieurement, celle d'un autre cercle, elle ne la touche qu'à un ſeul point.*

PREMIÉREMENT. La circonférence du cercle FDG*, qui touche intérieurement celle du cercle EDB au point D, ne la touche qu'à ce ſeul point. Fig. 26.

Conſt. Tirez du point de contact D par les centres C & A, la ligne droite DCA (n). Du point B, pris à volonté ſur la circonférence du cercle EDB; tirez aux mêmes centres C & A, les lignes droites BC & BA. N. 236.

Démonſt. Dans le triangle ACB, la ſomme des côtés AC & CB eſt plus grande que le côté AB (n). Mais, ce côté AB eſt égal à la ligne AD (n). Donc, la ſomme des côtés AC & CB eſt plus grande que la ligne AD. Ainſi, ſi & de cette ſomme & de cette ligne on retranche la même ligne AC, le reſte CB de cette ſomme ſera plus grand que le reſte CD de cette ligne. N. 114. N. 35.

Or, la même démonſtration ſubſiſte; à quelque point de la circonférence du cercle EDB que l'on prenne le point B; pourvu que ce ne ſoit pas au point de contact D. Donc, la ligne CB ſera toujours plus grande que le rayon CD du cercle FDG. Par conſéquent, ſon extrémité B ſera toujours hors de ce cercle.

Mais, puiſque le point B eſt toujours hors du cercle FDG, excepté ſeulement lorſqu'il eſt pris ſur le point D, la circonférence de ce cercle ne peut toucher celle du cercle EDB qu'à ce ſeul point D.

Donc, C. Q. F. 1° D.

SECONDEMENT. La circonférence
Fig. 27. du cercle Y*, qui touche extérieurement celle du cercle X au point D, ne la touche qu'à ce ſeul point.

Conſt. Tirez par le point de contact D & par les centres A & C, la ligne droite
N. 237. ADC (n). Du point B, pris à volonté ſur la circonférence du cercle X, tirez aux mêmes centres A & C, les lignes droites BA & BC.

Démonſt. Dans le triangle ABC, la ſomme des côtés AB & BC eſt plus grande
N. 114. que le côté ADC (n). Donc, ſi de la ſomme de ces côtés AB & BC, on retranche le rayon AB, & du côté ADC le

rayon

rayon AD, le reſte CB de cette ſomme ſera plus grand que le reſte CD de ce côté.

Or, la même démonſtration ſubſiſte, à quelque point de la circonférence du cercle X que l'on prenne le point B, pourvu que ce ne ſoit pas au point de contact D. Donc, la ligne CB ſera toujours plus grande que le rayon CD du cercle Y. Par conſéquent, ſon extrémité B ſera toujours hors de ce cercle.

Mais, puiſque le point B eſt toujours hors du cercle Y, excepté ſeulement lorſqu'il eſt pris ſur le point D, la circonférence de ce cercle ne peut toucher celle du cercle X qu'à ce ſeul point.

Donc, C. Q. F. 2° D.

PROPOSITION XIV.

THÉORÊME.

239. *Dans le cercle, les cordes qui ſont égales ſont également éloignées du centre; & celles qui ſont également éloignées du centre, ſont égales.*

PREMIÉREMENT. Les cordes AB* & CD qui ſont égales, ſont également éloignées du centre E du cercle X. Fig. 28.

Conſt. Du centre E, abaiſſez (n) la per- N. 96.

pendiculaire EF à la corde AB ; & la perpendiculaire EG à la corde CD. Du même centre E, tirez aux points A & C, les lignes droites EA & EC.

Démonst. Les triangles AFE & CGE sont rectangles, l'un en F & l'autre en G
N. 171. [C]. Ainsi (n), les quarrés des côtés AF & FE sont égaux au quarré de l'hypothénuse EA ; & ceux des côtés CG & GE le sont à celui de l'hypothénuse EC.

N. 35. Mais (n), ces hypothénuses sont egales.
N. 62. Donc (n), les quarrés des côtés AF & FE sont égaux à ceux des côtés CG & GE. Par conséquent, puisque les côtés AF & CG, qui sont les moitiés des cordes AB
N. 228. & CD (n), sont égaux [H], les côtés FE GE le sont aussi.

N. 215. Or (n), ces côtés FE & GE sont les distances du centre E aux cordes AB & CD. Donc, ces cordes sont également éloignées de ce centre.

Par conséquent, C. Q. F. 1° D.

Fig. 28. SECONDEMENT. Les cordes AB* & CD qui sont également éloignées du centre E du cercle X, sont égales.

Const. La même que la précédente.

Démonst. On démontre de la même maniere dont on vient de le faire, que dans les triangles AFE & CGE, les quar-

rés des côtés AF & FE ſont égaux à ceux des côtés CG & GE. Donc, puiſque les côtés FE & GE, qui (n) ſont les diſ- N. 215.
tances du centre E aux cordes AB & CD, ſont égaux [H], les côtés AF & CG le ſont auſſi.

Or (n), ces côtés AF & CG ſont les N. 228.
moitiés des cordes AB & CD, chacun de chacune. Donc (n), ces cordes ſont N. 67.
égales.

Par conſéquent, C. Q. F. 2° D.

PROPOSITION XV.

THÉORÊME.

240. *Dans le cercle, la corde qui paſſe par le centre eſt la plus grande; & les cordes qui ſont plus près du centre, ſont plus grandes que celles qui en ſont plus éloignées.*

PREMIÉREMENT. La corde AB* Fig. 29.
qui paſſe par le centre C du cercle X, eſt la plus grande que l'on puiſſe tirer dans ce cercle.

Conſt. Tirez la corde DE à volonté, mais qui ne paſſe point par le centre C. Du même centre C, tirez aux points D & E, les lignes droites CD & CE.

N. 33. *Démonst.* Puisque (n) la corde AB est un diametre du cercle X, elle est égale à la somme des côtés CD & CE du triangle
N. 35. DCE (n). Mais, la somme de ces côtés est
N. 114. plus grande que le côté DE (n). Donc, la corde AB est aussi plus grande que ce côté.

Or, la même démonstration subsiste, par quelque point du cercle X que l'on tire la corde DE, pourvu que ce ne soit pas par le centre C. Donc, la corde AB qui [H] passe par ce centre, est la plus grande qu'il soit possible de tirer dans ce cercle.

Par conséquent, C. Q. F. 1° D.

Fig. 30. SECONDEMENT. La corde AB*, qui est plus près que la corde DE du centre C du cercle X, est plus grande que cette corde DE.

Const. Tirez du centre C aux points A, D, E & B, les lignes droites CA, CD, CE & CB.

Démonst. Dans les triangles ACB & DCE, l'angle ACB est plus grand que
N. 72. l'angle DCE (n), le côté CA est égal au
N. 35. côté CD (n), & le côté CB au côté CE
N. 35. (n). Donc, le côté AB est plus grand que
N. 121. le côté DE (n).

Par conséquent, C. Q. F. 2° D.

PROPOSITION XVI.

THÉORÊME.

241. *Si une ligne droite qui eſt perpendiculaire au diametre d'un cercle, eſt tirée de l'une des extrémités de ce diametre :* Premiérement, *cette extrémité eſt le ſeul point que cette perpendiculaire ait de commun avec ce cercle :* Secondement, *de cette même extrémité, on ne peut tirer aucune ligne droite entre cette même perpendiculaire & ce même cercle.*

PREMIÉREMENT. L'extrémité B* du diametre AB, eſt le ſeul point que la perpendiculaire BC à ce diametre, peut avoir de commun avec le cercle X. *Fig. 31.

Conſt. Du point E, pris à volonté ſur la perpendiculaire BC, mais qui ſoit cependant différent du point B, tirez au centre D, la ligne droite ED.

Démonſt. Dans le triangle DEB, l'angle B eſt droit [H]. Donc (n), il eſt plus grand que l'angle DEB; & par conſéquent (n), le côté DE eſt plus grand que le côté DB. N. 104. N. 111.

Or, la même démonſtration ſubſiſte,

à quelque point de la perpendiculaire BC que l'on prenne le point E ; pourvu que ce ne ſoit pas au point B. Donc, le côté DE ſera toujours plus grand que le rayon DB ; & par conſéquent, ſon extrémité E ſera toujours hors du cercle X.

Mais, puiſque le point E eſt toujours hors de ce cercle, excepté ſeulement lorſqu'il eſt pris ſur le point B, la perpendiculaire BC ne peut avoir que ce ſeul point B de commun avec ce même cercle.

Par conſéquent, C. Q. F. 1° D.

Fig. 32. SECONDEMENT. Du point B*, on ne peut tirer aucune ligne droite entre la perpendiculaire BC & le cercle X.

Conſt. Du point B, tirez entre le diametre AB & la perpendiculaire BC, une ligne droite quelconque BF. Du centre D,
N 96. abaiſſez (n) la perpendiculaire DE à cette ligne.

Démonſt. Le triangle DEB eſt rectan-
N. 104. gle en E [c]. Donc (n), l'angle DEB eſt plus grand que l'angle DBE ; & par conſéquent, le côté DB eſt plus grand que le
N. 111. côté DE (n). Mais, puiſque le rayon DB eſt plus grand que le côté DE, l'extrémité E de ce côté eſt dans le cercle X. Ainſi, puiſque la ligne BF paſſe par cette extrémité, elle paſſe dans ce cercle.

Or, la même démonstration subsiste, quelque près de la perpendiculaire BC que l'on tire la ligne BF. Donc, on ne peut tirer aucune ligne droite entre cette perpendiculaire & le cercle X.

Par conséquent, C. Q. F. 2° D.

COROLLAIRE I.

242. Il suit de la premiere partie de ce théorême, que *si une ligne droite qui est tirée de l'une des extrémités du diametre d'un cercle, est perpendiculaire à ce même diametre, elle est tangente à ce cercle* (n). N. 212.

COROLLAIRE II.

243. Il suit de ce corollaire, que *pour tirer d'un point donné sur la circonférence d'un cercle, une tangente à ce cercle, il faut tirer un diametre qui se termine à ce point ; & de ce même point, élever une perpendiculaire à ce diametre* (n). N. 95.

SCHOLIE.

244. *L'angle formé par une tangente AB* & par un arc AC, s'appelle un angle de* contingence. *Il ne peut être divisé par aucune ligne droite* (n) ; *mais il peut l'être en une infinité de parties, par des* Fig. 33. N. 241.

N. 238. *arcs AD, AE, &c (n). Or, ces deux propriétés oppofées, ont occafionné aux phyficiens beaucoup de raifonnemens, dont aucun n'eft fatisfaifant.*

Celui qui paroît avoir été le moins mal reçu, prétend que les arcs AD, AE, &c. ne divifent point l'angle CAB; mais qu'ils touchent feulement la ligne AB en des points d'autant plus longs, que ces arcs font moins courbes.

On ne conçoit pas trop comment ces arcs peuvent paffer entre les côtés AB & AC de l'angle BAC, fans cependant le divifer. Mais, à l'égard de toucher la ligne AB en des points d'autant plus longs que ces arcs font moins courbes; cela doit être, fuivant leurs définitions. Car, leurs lignes ayant une largeur, quelque étroite qu'on veuille la concevoir, il eft évident que plus deux de leurs lignes s'entre-couperont obliquement, plus le point d'interfection fera long. Or, il en eft de même du point de contact.

Les raifons de cette indivifibilité & de cette divifibilité font cependant très-fimples. Le propre d'une ligne droite eft d'aller toujours directement d'un point à un autre. Ainfi, elle ne peut partir du point A pour paffer au deffous de la tangente AB, fans couper la convexité de l'arc AC. Une ligne courbe au contraire, fe prête à cette con-

vexité, & passe entre l'arc & la tangente, sans toucher ni à l'un, ni à l'autre.

PROPOSITION XVII.

PROBLÊME.

245. *D'un point donné hors d'un cercle, tirer une tangente à ce cercle.*

Il faut tirer du point A * pris hors du cercle BD, une tangente à ce cercle. Fig. 34

Conſt. Tirez du point A au centre C, la ligne droite AC. Du même centre C, & avec la ligne AC priſe pour rayon, décrivez le cercle AE. Du point B auquel cette ligne AC coupe la circonférence du cercle BD, élevez (n) la perpendiculaire BE à cette même ligne AC. N. 95. Du point E auquel cette perpendiculaire rencontre la circonférence du cercle AE, tirez au centre C la ligne droite EC. Enfin, tirez du point A au point D, auquel cette ligne coupe la circonférence du cercle BD, la ligne droite AD. Cette derniere ligne ſera la tangente demandée.

Démonſt. Dans les triangles CDA & CBE, le côté CD eſt égal au côté CB

N. 35. & le côté CA au côté CE (n), & l'an-
N. 82. gle C est commun. Donc (n), l'angle CDA est égal à l'angle CBE; & par conséquent, puisque le dernier est un angle droit [c], le premier en est aussi un.

Mais, puisque l'angle CDA est un angle droit, la ligne AD est perpendiculaire au rayon CD. Or [c], cette perpendiculaire est tirée de l'extrémité D de ce rayon. Donc, elle est tangente au cercle
N. 242 BD (n).

Par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÊME.

246. *Si une ligne droite touche un cercle, la ligne droite qui est tirée du centre au point de contact, est perpendiculaire à cette tangente.*

Fig. 35. LA ligne droite AB * qui est tirée du centre A du cercle X au point B, auquel la ligne droite CD le touche, est perpendiculaire à cette tangente

Const. Tirez du centre A à un point quelconque E de la ligne CD, mais qui soit cependant différent du point B, la ligne droite AE.

Démonst. Si quelque ligne droite AE tirée du centre A, mais différente de la ligne AB, pouvoit être perpendiculaire à la tangente CD, le triangle BAE seroit rectangle en E. Ainsi (n), l'angle AEB N. 104.
seroit plus grand que l'angle ABE; & par conséquent (n), le côté AB seroit plus N. 111.
grand que le côté AE.

Or (n), cela ne peut point être; puis- N. 72.
que (n) ce même côté AB est égal à la N. 35.
partie AF du côté AE.

Donc, aucune ligne droite tirée du centre A, mais différente de la ligne AB, ne peut être perpendiculaire à la tangente CD. Donc, la ligne AB est perpendiculaire à cette tangente.

Par conséquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION XIX.

THÉORÊME.

247. *Si une ligne droite touche un cercle, la perpendiculaire à cette tangente, qui est tirée du point de contact, passe par le centre.*

Fig. 36. DANS le cercle X*, la perpendiculaire AB à la tangente CD, qui est tirée du point de contact A, passe par le centre.

Const. Du point E, pris à volonté hors de la perpendiculaire AB; tirez au point A, la ligne droite EA.

Demonst. Si le point E étoit le centre du cercle X, la ligne EA seroit perpen-
N. 246. diculaire à la tangente CD (n). Ainsi, l'angle EAD seroit un angle droit; & par conséquent, il seroit égal à l'angle
N. 62. BAD (n). Mais, cela ne peut point être
N. 72. (n). Donc, le point E n'est pas le centre du cercle X.

Or, la même démonstration subsiste, à quelque point hors de la perpendiculaire AB que l'on prenne le point E. Donc,

le centre du cercle X eſt dans cette perpendiculaire.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XX.

THÉORÊME.

248. *L'angle qui a ſon ſommet au centre d'un cercle, eſt double de celui qui a le ſien dans la circonférence, lorſqu'ils s'appuient tous les deux ſur le même arc.*

L'ANGLE AEC * qui a ſon ſommet E au centre E du cercle X, & s'appuie ſur l'arc AC, eſt double de l'angle ABC qui a ſon ſommet B dans la circonférence, & s'appuie ſur le même arc AC. Fig. 37 & 38.

Conſt. Tirez du point B, par le centre E, la ligne droite BED.

Démonſt. L'angle AED, qui eſt extérieur au triangle AEB, eſt égal (n.) à la ſomme des angles intérieurs EAB & EBA qui lui ſont oppoſés. Or, ces angles intérieurs ſont égaux (n), puiſque les côtés EA & EB le ſont (n). Donc, l'angle AED eſt double de l'angle ABD. Et par des raiſons pareilles, l'angle DEC eſt auſſi double de l'angle DBC. N. 135. N. 84. N. 35.

Or, puiſque (*fig.* 37.) chaque partie AED & DEC de l'angle AEC, eſt double de chaque partie correſpondante ABD & DBC de l'angle ABC, l'angle AEC eſt auſſi double de l'angle ABC.

Et puiſque (*fig.* 38.) l'angle AED eſt double de l'angle ABD, & que, la partie DEC du premier, eſt double de la partie DBC du ſecond; l'autre partie AEC du même premier, eſt auſſi double de l'autre partie ABC du même ſecond.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

249. Il ſuit de ce théorême, que *l'angle qui a ſon ſommet dans la circonférence d'un cercle, n'a pour meſure que la moitié de l'arc ſur lequel il s'appuie.*

Fig. 37 & 38. L'angle ABC * qui a ſon ſommet B dans la circonférence du cercle X, n'a pour meſure que la moitié de l'arc AC ſur lequel il s'appuie.

Conſt. Tirez du centre E aux points A & C, les lignes droites EA & EC.

Démonſt. L'angle AEC a pour meſure
N. 37. tout l'arc AC (n). Or, l'angle ABC n'eſt
N. 248. que la moitié de l'angle AEC (n). Donc, il n'a pour meſure que la moitié de l'arc AC.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXI.

THÉORÊME.

250. *Les angles qui ſont dans le même ſegment* (n), *ſont égaux.* N. 222.

LES angles B * & D qui ſont dans le même ſegment ABDC, ſont égaux. Fig. 39.

Pour la démonſtration, achevez le cercle X.

Démonſt. Les angles B & D ont chacun leur ſommet dans la circonférence du cercle X, & s'appuient chacun ſur le même arc AEC. Ainſi (n), ils ont chacun pour meſure la moitié de cet arc. Or, puiſque ces angles ont chacun la même meſure, ils ſont égaux (n). N. 249. N. 37.

Par conſéquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION XXII.

THÉORÊME.

251. *La ſomme des angles oppoſés d'un quadrilatere inſcrit † dans un cercle, eſt égale à celle de deux angles droits.*

La ſomme des angles oppoſés du quadrilatere ABCD qui eſt inſcrit dans le
Fig. 40. cercle X *, par exemple celle des angles BAD & BCD, eſt égale à celle de deux angles droits.

Démonſt. L'angle BAD a pour meſure
N. 249. la moitié de l'arc BCD (n); & l'angle BCD a pour meſure la moitié de l'arc BAD (n). Donc, la ſomme de ces deux
N. 249. angles a pour meſure la moitié de la circonférence du cercle X.

N. 38. Mais (n), la moitié de la circonférence d'un cercle eſt la meſure de la ſomme de deux angles droits. Donc, la ſomme des deux angles BAD & BCD, & celle de deux angles droits, ont chacune la même meſure.

Par conſéquent, elles ſont égales. Donc, C. Q. F. D.

† Une figure eſt *inſcrite* dans une autre, lorſque tous ſes angles ont leur ſommet dans la circonférence de cette autre.

PROPOSITION XXIII.

THÉORÊME.

252. *Les ſegmens de cercle qui ont la même corde, & ſont vers un même côté, ne ſont point ſemblables.*

LES ſegmens de cercle ABC * & ADC Fig. 41.
qui ont la même corde AC, & ſont vers le même côté, ne ſont point ſemblables.

Conſt. Du point B, pris à volonté ſur l'arc du plus grand ſegment, tirez aux points A & C, les lignes droites BA & BC. Du point D auquel la ligne BC coupe l'arc du plus petit ſegment, tirez au point A la ligne droite DA.

Démonſt. L'angle ADC, qui eſt extérieur au triangle ABD, eſt plus grand (n) N. 102.
que l'angle intérieur B qui lui eſt oppoſé. Or, puiſque l'angle ADC, qui eſt inſcrit dans le ſegment ADC, n'eſt point égal à l'angle B qui eſt inſcrit dans le ſegment ABC, ces deux ſegmens ne ſont point ſemblables (n). N. 224.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXIV.

THÉORÊME.

253. *Les ſegmens de cercle qui ont des cordes égales, & qui ſont ſemblables, ſont égaux.*

Fig. 42. LES ſegmens de cercle ABC * & DEF qui ont des cordes égales AC & DF, & qui ſont ſemblables, ſont égaux.

Conſt. Poſez par penſée le ſegment ABC ſur le ſegment DEF, de maniere que le point A étant ſur le point D, la corde AC ſoit ſur la corde DF.

Démonſt. Le point C tombera ſur le
N. 70. point F (n), puiſque [H] la corde AC eſt égale à la corde DF. Ainſi, la corde DF ſera commune aux ſegmens ABC & DEF. Par conſéquent, ſi l'arc ABC tomboit, ou au deſſus, ou au deſſous, de l'arc DEF, deux ſegmens de cercle qui auroient la même corde DF, & ſeroient vers le même côté, pourroient être ſemblables.

N. 252. Or (n), cela n'eſt point poſſible. Donc, l'arc ABC tombera ſur l'arc DEF; & par conſéquent, les ſegmens ABC & DEF ſe couvriront réciproquement. Mais, puiſ-

que ces ſegmens ſe couvrent réciproquement, ils ſont égaux (n). N. 69.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXV.

PROBLÊME.

254. *Trouver le centre d'un arc de cercle donné.*

IL faut trouver le centre de l'arc de cercle CBD*. Fig. 43.

Conſt. Prenez ſur l'arc C B D trois points C, B & D, à volonté. Tirez du point B aux points C & D, les cordes BC & BD. Diviſez (n) chacune de ces N. 93. cordes en deux parties égales BE & EC, BF & FD. Enfin, du point E, élevez (n) N. 95. la perpendiculaire EA à la corde BC; & du point F, la perpendiculaire FA à la corde BD. Le point A, auquel ces perpendiculaires ſe rencontrent, eſt le centre demandé.

Pour la démonſtration. Tirez du point A aux points C, B & D, les lignes droites AC, AB & AD.

Démonſt. Dans les triangles AEC & AEB, qui ſont rectangles l'un & l'autre

en E [c], le côté EC eſt égal au côté EB [c], & le côté EA eſt commun. Donc,
N. 82. le côté AC eſt égal au côté AB (n).

Or, en comparant le triangle AFB au triangle AFD, on démontre de la même maniere, que le côté AB eſt égal au côté AD.

Donc, on peut tirer du point A à l'arc CBD plus de deux lignes droites égales. Par conſéquent, ce point eſt le centre de
N. 234 cet arc (n).

Donc, C. Q. F. F.

PROPOSITION XXVI.

THÉORÊME.

255. *Les angles égaux qui ont leurs ſommets dans les circonférences de cercles égaux, s'appuient ſur des arcs égaux.*

Fig. 44. LES arcs AIC * & DKF, ſur leſquels s'appuient les angles égaux B & DEF, qui ont leurs ſommets B & E dans les circonférences des cercles égaux G & H, ſont auſſi égaux.

Conſt. Tirez du point A au point C, la ligne droite AC; & du point D au point F, la ligne droite DF. Tirez auſſi

du centre G aux points A & C, les lignes droites GA & GC; & du centre H aux points D & F, les lignes droites HD & HF.

Démonst. L'angle B a ſon ſommet dans la circonférence [H], l'angle G a le ſien au centre [C], & ces deux angles s'appuient ſur le même arc AIC. Donc (n), N. 248.
l'angle G eſt double de l'angle B; & par des raiſons pareilles, l'angle H eſt auſſi double de l'angle DEF.

Mais, puiſque les angles B & DEF ſont égaux [H], les angles G & H le ſont auſſi (n). Ainſi, dans les triangles AGC N. 67.
& DHF, l'angle G eſt égal à l'angle H, le côté GA au côté HD (n), & le côté N. 210.
GC au côté HF. Donc, les côtés AC & DF ſont égaux (n). N. 82.

Ainſi, les ſegmens ABC & DEF, qui ſont ſemblables (n), [puiſque [H] les N. 224.
angles B & DEF ſont égaux], ont des cordes égales AC & DF. Donc, ces ſegmens ſont égaux (n). Par conſéquent, ſi N. 253.
du cercle G on retranche le ſegment ABC; & du cercle H le ſegment DEF, les reſtes, qui ſont les ſegmens AIC & DKF, ſont auſſi égaux (n). N. 64.

Mais, puiſque ces derniers ſegmens ſont égaux, & qu'ils ont des cordes égales AC

& DF, ils ont auſſi des arcs égaux AIC
N. 253. & DKF (n).

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

256. Il ſuit de ce théorême, que *les angles égaux, qui ont leurs ſommets aux centres de cercles égaux, s'appuient ſur des arcs égaux.*

PROPOSITION XXVII.

THÉORÊME.

257. *Les angles qui ont leurs ſommets dans les circonférences de cercles égaux, & qui s'appuient ſur des arcs égaux, ſont auſſi égaux.*

Fig. 44. LES angles B * & DEF qui ont leurs ſommets B & E dans les circonférences des cercles égaux G & H, & qui s'appuient ſur les arcs égaux AIC & DKF, ſont auſſi égaux.

Conſt. Tirez du point E aux points L & M, pris à volonté ſur la circonférence du cercle H, l'un au deſſous du point F & l'autre au deſſus, les lignes droites EL & EM.

Démonst. Si l'angle B n'étoit point égal à l'angle DEF, il le seroit à quelque angle DEL plus petit que cet angle ; ou à quelque angle DEM, plus grand que ce même angle.

Or, l'angle B n'est point égal à un angle D E L plus petit que l'angle D E F ; puisque s'il l'étoit, l'arc AIC seroit égal à l'arc DKL (n). Mais [H], le même arc N. 255.
AIC est aussi égal à l'arc DKF. Donc (n), N. 62.
l'arc DKL seroit égal à l'arc DKF. Ce qui ne peut être (n). N. 72.

Et l'angle B n'est point non plus égal à un angle DEM plus grand que l'angle DEF; puisque s'il l'étoit, l'arc AIC seroit égal à l'arc DKM (n). Mais [H], le même arc N. 255.
AIC est aussi égal à l'arc DKF. Donc (n), N. 62.
l'arc DKM seroit égal à l'arc DKF. Ce qui ne peut encore être (n). N. 72.

Donc, l'angle B est égal à l'angle DEF. Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

258. Il suit de ce théorême, que *les angles qui ont leurs sommets aux centres de cercles égaux, & qui s'appuient sur des arcs égaux, sont aussi égaux.*

PROPOSITION XXVIII.

THÉORÊME.

259. *Dans les cercles égaux, les cordes égales tendent des arcs égaux.*

Fig. 45. DANS les cercles égaux B* & E, les arcs AGC & DHF qui ſont tendus par les cordes égales AC & DF, ſont égaux.

Conſt. Tirez du centre B aux points A & C, les lignes droites BA & BC; & du centre E aux points D & F, les lignes droites ED & EF.

Démonſt. Dans les triangles ABC &
N. 210. DEF, le côté BA eſt égal au côté ED (n),
N. 210. le côté BC au côté EF (n), & le côté AC
N. 88. au côté DF [H]. Donc (n), l'angle B eſt égal à l'angle E.

Or, puiſque les angles B & E, qui [C] ont leurs ſommets aux centres des cercles égaux B & E, ſont égaux, les arcs AGC & DHF, ſur leſquels ces angles s'appuient
N. 256. [C], ſont auſſi égaux (n).

Par conſéquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION

PROPOSITION XXIX.

THÉORÊME.

260. *Dans les cercles égaux, les arcs égaux ſont tendus par des cordes égales.*

DANS les cercles égaux B* & E, les cordes AC & DF qui tendent les arcs égaux AGC & DHF, ſont égales. Fig. 45.

Conſt. La même que la précédente.

Démonſt. Les angles B & E qui [C] ont leurs ſommets aux centres des cercles égaux B & E, s'appuient ſur des arcs AGC & DHF qui ſont auſſi égaux [H]. Donc, ces angles ſont égaux (n). Ainſi, dans N. 258. les triangles ABC & DEF, l'angle B eſt égal à l'angle E, le côté BA au côté ED, & le côté BC au côté EF (n). Donc, le N. 210. côté AC eſt égal au côté DF (n). N. 82.

Par conſéquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION XXX.

PROBLÊME.

261. *Diviser un arc de cercle en deux parties égales.*

IL faut diviser en deux parties égales,
Fig. 46. l'arc de cercle ABC *

Conſt. Tirez de l'extrémité A de l'arc ABC à ſon autre extrémité C, la ligne
N. 93. droite AC, Diviſez (n) cette ligne en
N. 95. deux parties égales DA & DC. Enfin (n), élevez du point D la perpendiculaire DB à cette même ligne. Cette perpendiculaire diviſera l'arc ABC en deux parties BEA & BFC, qui ſont égales.

Pour la démonſtration. Tirez du point B aux points A & C, les lignes droites BA & BC.

Démonſt. Dans les triangles BDA & BDC, qui ſont rectangles l'un & l'autre en D [c], le côté DA eſt égal au côté DC [c], & le côté DB eſt commun.
N. 82. Donc, le côté BA eſt égal au côté BC (n).

Or, puiſque les cordes BA & BC ſont
N. 259. égales, les arcs BEA & BFC ſont égaux (n). Par conſéquent, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

262. Il ſuit de ce problême, que *pour diviſer un arc de cercle en quatre parties égales, il faut commencer par le diviſer en deux parties égales ; & diviſer enſuite chacune de ces deux parties égales, en deux autres qui le ſoient auſſi. Et ainſi de ſuite, pour le diviſer en 8, en 16, en 32, &c.*

Mais à l'égard de la diviſion d'un arc de cercle en un nombre déterminé de parties égales, il en eſt de même que de celle d'un angle (nº 92). *La ſolution de l'un de ces deux problêmes donneroit celle de l'autre.*

PROPOSITION XXXI.

THÉORÊME.

263. *L'angle qui eſt inſcrit dans un demi-cercle, eſt droit : celui qui eſt inſcrit dans un ſegment plus grand qu'un demi-cercle, eſt aigu : enfin, celui qui eſt inſcrit dans un ſegment plus petit qu'un demi-cercle, eſt obtus.*

PREMIÉREMENT. L'angle ABC* qui eſt inſcrit dans le demi-cercle ATBC, eſt un angle droit. Fig. 47.

Conſt. Prolongez le côté CB vers N, indéfiniment ; & tirez du point B au centre O, la ligne droite BO.

Démonſt. L'angle ABN eſt extérieur
N. 135. au triangle ABC. Ainſi (n), il eſt égal à la ſomme des angles intérieurs C & A
N. 84. qui lui ſont oppoſés. Mais (n), ces angles C & A ſont égaux, l'un à l'angle OBC,
N. 35. & l'autre a l'angle OBA ; puiſque (n) les côtés OC & OB du triangle COB ſont égaux, de même que les côtés OA & OB
N. 61. du triangle AOB. Donc (n), l'angle ABN eſt égal à la ſomme des angles OBC
N. 72. & OBA ; & par conſéquent (n), à l'angle ABC.

Or, puiſque les angles ABN & ABC ſont égaux, la ligne AB eſt perpendicu-
N. 19. laire à la ligne NBC (n). Ainſi, l'angle ABC eſt un angle droit.

Par conſéquent, C. Q. F. 1° D.

Fig. 47. SECONDEMENT. L'angle EFG* qui eſt inſcrit dans le ſegment EQFG plus grand qu'un demi-cercle, eſt un angle aigu.

Conſt. Tirez du point G par le centre P, le diametre GQ ; & du point F au point Q, la ligne droite FQ.

Démonſt. L'angle EFG eſt plus petit que
N. 72. l'angle QFG (n). Or, l'angle QFG eſt un angle droit [D] ; puiſque le ſegment QFG

dans lequel il eſt inſcrit, eſt un demi-cercle [C]. Donc, l'angle EFG eſt plus petit qu'un angle droit. Par conſéquent, il eſt un angle aigu (n). N. 23.

Donc, C. Q. F. 2° D.

TROISIÉMEMENT. Enfin, l'angle IKL* qui eſt inſcrit dans le ſegment IVKL, plus petit qu'un demi-cercle, eſt un angle obtus. Fig. 47.

Conſt. Tirez du point L par le centre R, le diametre LS; & du point K au point S, la ligne droite KS.

Démonſt. L'angle IKL eſt plus grand que l'angle SKL (n). Or, l'angle SKL eſt un angle droit [D], puiſque le ſegment SVKL dans lequel il eſt inſcrit, eſt un demi-cercle [C]. Donc, l'angle IKL eſt plus grand qu'un angle droit. Par conſéquent, il eſt un angle obtus (n). N. 72. N. 22.

Donc, C. Q. F. 3° D.

SCHOLIE.

On démontre auſſi ce théorême, de la maniere ſuivante.

Les angles ABC, EFG & IKL ont pour meſure* (n), *l'un, la moitié de l'arc ADC, l'autre, la moitié de l'arc EHG; & le dernier, la moitié de l'arc IML. Or* Fig. 47. N. 249.

[H], *les moitiés de ces arcs ſont; l'une le quart de la circonférence d'un cercle; l'autre, moins que ce quart; & la derniere,*
N. 38, *plus que ce même quart. Donc* (n), *les an-*
23 & 22. *gles propoſés ſont; l'un, un angle droit; l'autre, un angle aigu; & le dernier, un angle obtus.*

Par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXII.

THÉORÊME.

264. *Dans le cercle, les angles dans les ſegmens, & les angles des ſegmens, ſont alternativement † égaux.*

Fig. 48. DANS le cercle H * qui eſt diviſé par la corde CD en deux ſegmens CFD & CEGD: *Premiérement*, l'angle E qui eſt dans le ſegment CEGD, eſt égal à l'angle DCA du ſegment CFD.

Conſt. Tirez du point de contact C par le centre H, le diametre CG; & du point G au point D, la ligne droite GD.

Démonſt. La ſomme des angles DCA
N. 72. & DCG, eſt égale à l'angle ACG (n),

† C'eſt-à-dire, que l'angle dans le ſegment & l'angle du ſegment doivent être pris; l'un, d'un côté de la ligne coupante; & l'autre, de l'autre côté de la même ligne.

qui eſt un angle droit (n). Or, la ſomme N. 246.
des angles G & DCG eſt auſſi égale à un
angle droit (n); puiſque le triangle CDG N. 136
eſt rectangle en D (n). Donc, la ſomme N. 263.
des angles DCA & DCG eſt égale (n) N. 62.
à celle des angles G & DCG; & par
conſéquent, l'angle G eſt égal à l'angle
DCA (n). N. 64.

Mais, les angles G & E ſont égaux
(n), puiſqu'ils ſont dans le même ſegment N. 250.
CEGD. Donc, l'angle E eſt auſſi égal
à l'angle DCA.

Secondement, l'angle F qui eſt dans le
ſegment CFD, eſt égal à l'angle DCB du
ſegment CEGD.

Démonſt. Les angles F & E ſont les
angles oppoſés du quadrilatere FDEC;
ainſi leur ſomme eſt égale à celle de
deux angles droits (n). Or, la ſomme des N. 251.
angles DCB & DCA eſt auſſi égale à
celle de deux angles droits (n). Donc, la N. 57.
ſomme des angles F & E eſt égale à celle
des angles DCB & DCA (n). Mais [D], N. 62.
l'angle E eſt égal à l'angle DCA. Donc,
l'angle F eſt égal à l'angle DCB.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

265. Il ſuit de ce théorême, que *dans
le cercle, l'angle du ſegment a pour meſure*

la moitié de l'arc qui est tendu par la corde de ce segment.

Fig. 48. Dans le cercle H*, l'angle DCA a pour mesure la moitié de l'arc DFC ; & l'angle DCB, la moitié de l'arc DGEC.

Const. Des points F & E, pris à volonté, l'un dans l'arc DFC, & l'autre dans l'arc DGEC, tirez aux points D & C, les lignes droites FD & FC, ED & EC.

Démonst. l'angle DCA est égal à l'an-
N. 264. gle E (n). Or, l'angle E a pour mesure la
N. 249. moitié de l'arc DFC (n). Donc, l'angle DCA a aussi pour mesure la moitié du même arc.

Pareillement, l'angle DCB est égal à
N. 264. l'angle F (n). Or, l'angle F a pour mesure
N. 249. la moitié de l'arc DGEC (n). Donc, l'angle DCB a aussi pour mesure la moitié du même arc.

Par conséquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXIII.

PROBLÊME.

266. *Décrire ſur une ligne droite donnée, un ſegment de cercle, qui ſoit capable* † *d'un angle donné.*

Il faut décrire ſur la ligne droite AB *, un ſegment de cercle, qui ſoit capable de l'angle C. Fig. 49.

Conſt. Décrivez ſous la ligne AB (n), l'angle BAD qui ait le point A pour ſommet, & ſoit égal à l'angle C. Du même point A, élevez (n) la perpendiculaire AE à la ligne AD. Diviſez (n) la ligne AB en deux parties égales AF & FB. Du point F, élevez auſſi (n) la perpendiculaire FE à cette même ligne AB. Enfin, du point E, auquel ces deux perpendiculaires ſe rencontrent, pris pour centre, & avec la ligne EA, priſe pour rayon, décrivez l'arc AGB. Le ſegment AGB, que cet arc formera avec la ligne AB, eſt le ſègment demandé. N. 119. N. 95. N. 93. N. 95.

Pour la démonſtration. Achevez le cercle AGBH.

† Un ſegment eſt *capable* d'un certain angle, lorſque les angles que l'on inſcrit dans ce ſegment ſont égaux à ce certain angle.

Démonst. La ligne AD est tangente au
N. 242. cercle AGBH (n); puisque [c] elle est tirée de l'extrémité A du rayon EA au-
N. 221. quel elle est perpendiculaire. Donc (n), l'angle BAD est l'angle du segment AHB;
N. 264. & par conséquent (n), il est égal à un angle quelconque inscrit dans le segment AGB.

Mais [c], le même angle BAD est aussi égal à l'angle C. Donc un angle quelconque inscrit dans le segment AGB, sera égal
N. 62. à l'angle C (n).

Par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION XXXIV.

PROBLÊME.

267. *Diviser un cercle en deux segmens, dont l'un soit capable d'un angle donné.*

Fig. 50. Il faut diviser le cercle X, en deux segmens, dont l'un soit capable de l'angle E.

Const. Du point C, pris à volonté sur
N. 243. la circonférence, tirez (n) la tangente AB au cercle X. Décrivez sur cette tangente
N. 119. (n), l'angle DCB qui ait le même point

précédent C pour ſommet, & ſoit égal à l'angle E. Le côté DC diviſera le cercle X, comme il eſt demandé.

Démonſt. L'angle DCB eſt l'angle du ſegment CGD (n). Ainſi, il eſt égal (n) à un angle quelconque inſcrit dans le ſegment CFD. Mais, le même angle DCB eſt auſſi égal à l'angle E [c]. Donc (n), un angle quelconque inſcrit dans le ſegment CFD, ſera égal à l'angle E. N. 221. N. 264. N. 62.

Par conſéquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION XXXV.

THÉORÊME.

268. *Dans le cercle, ſi deux cordes s'entrecoupent, le rectangle des parties de l'une eſt égal au rectangle des parties de l'autre.*

DANS le cercle X*, le rectangle des parties AF & FB de la corde AB, eſt égal au rectangle des parties CF & FD de la corde CD. Fig. 51 52, 53 & 54.

Les cordes AB & CD paſſent chacune par le centre du cercle ; ou une ſeule y paſſe, & eſt, ou perpendiculaire, ou oblique

à celle qui n'y passe point; ou enfin, aucune n'y passe.

PREMIER CAS.

Fig. 51. *Lorsque les cordes AB * & CD passent chacune par le centre F.*

Démonst. Les parties AF, FB, CF &
N. 35. FD sont toutes égales (n). Ainsi le rectangle des deux premieres est égal à celui des deux dernieres.

SECOND CAS.

Fig. 52. *Lorsqu'une seule des cordes AB* & CD, par exemple la corde AB, passe par le centre E; & est perpendiculaire à l'autre corde CD qui n'y passe point.*

Const. Tirez du point C au centre E, la ligne droite CE.

Démonst. La ligne AB est divisée en deux parties AF & FB; & le point E est
N. 35. son milieu (n). Ainsi, le rectangle de ces deux parties, avec le quarré de la ligne EF, est égal au quarré de la ligne EB
N. 187. (n); & par conséquent, à celui de la ligne EC, puisque ces lignes EB & EC sont
N. 35. égales (n). Mais, les quarrés des lignes CF & EF sont aussi égaux au quarré de la
N. 171. même ligne EC (n), puisque le triangle CFE est rectangle en F [H]. Donc, le rectangle précédent, avec le quarré de la

ligne EF, eſt égal aux quarrés des lignes CF & EF (n). Par conſéquent, ce même N. 62.
rectangle eſt égal au quarré de la ligne CF (n). N. 64.

Or, le quarré de cette ligne CF eſt la même choſe que le rectangle des parties CF & FD ; puiſque ces parties ſont égales (n). Donc, le rectangle des parties N. 228.
AF & FB, eſt égal à celui des parties CF & FD †.

TROISIEME CAS.

Lorſqu'une ſeule des cordes AB & CD, Fig. 53.*
par exemple la corde AB, paſſe par le centre E ; & eſt oblique à l'autre corde CD qui n'y paſſe point.

Conſt. Tirez du point D au centre E, la ligne droite DE ; & du même centre E, abaiſſez (n) la perpendiculaire EG à la N. 96.
corde CD.

Démonſt. La ligne CD eſt diviſée en deux parties CF & FD ; & le point G eſt ſon milieu (n). Ainſi, le rectangle de N. 228.
ces deux parties, avec le quarré de la ligne GF, eſt égal au quarré de la ligne GD (n). Par conſéquent, ce même rectangle, N. 187.

† Ce ſecond cas eſt celui que l'on nomme la *propriété du cercle*. On l'exprime ordinairement en diſant que *dans le cercle, le rectangle des abciſſes eſt égal au quarré de l'ordonnée.*

avec les quarrés des lignes GF & GE, eſt
N. 63. égal à ceux des lignes GD & GE (n).

Mais, les quarrés des lignes GF & GE ſont égaux au quarré de la ligne EF: & ceux des lignes GD & GE le ſont au
N. 171. quarré de la ligne E D (n); puiſque les triangles E G F & E G D ſont rectangles l'un & l'autre en G [c]. Donc, le rectangle précédent, avec le quarré de la ligne E F, eſt égal au quarré de la ligne
N. 61. ED (n).

Or, la ligne AB eſt auſſi diviſée en deux parties AF & FB; & le point E eſt
N. 35. auſſi ſon milieu (n). Donc, le rectangle de ces deux parties, avec le quarré de la ligne EF, eſt égal au quarré de la ligne EB
N. 187. (n); & par conſéquent, à celui de la même ligne précédente ED, puiſque ces
N. 35. lignes EB & ED ſont égales (n).

N. 62. Donc (n), le rectangle des parties AF & FB, avec le quarré de la ligne EF, eſt égal au rectangle des parties CF & FD, avec le quarré de la même ligne EF. Par conſéquent, ce premier rectangle eſt égal
N. 64 au dernier (n).

QUATRIEME CAS.

Fig. 54. *Enfin, lorſqu'aucune des cordes AB* * *& CD ne paſſe par le centre E.*

Conſt. Tirez par le centre E & par le point F, le diametre GH.

Démonſt. Le rectangle des parties AF & FB eſt égal à celui des parties GF & FH [D]; puiſque la corde GH paſſe par le centre E [C]. Or, par la même raiſon, le rectangle des parties CF & FD eſt auſſi égal à celui des mêmes parties GF & FH. Donc, le rectangle des parties AF & FB, eſt égal à celui des parties CF & FD (n). N. 62.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE **.

269. Il ſuit de ce théorême, que *dans le cercle, ſi une corde eſt diviſée en deux parties quelconques, le rectangle de ces deux parties, avec le quarré de la diſtance du point de ſection au centre, eſt égal au quarré du rayon de ce même cercle.*

Le rectangle des parties CF * & FD de Fig. 54. la corde CD, avec le quarré de la diſtance FE du point de ſection F au centre E, eſt égal au quarré du rayon EH.

Conſt. Tirez par le point de ſection F le diametre HEG.

Démonſt. Puiſque les cordes CD & GH s'entrecoupent au point F, le rectangle des parties CF & FD de la premiere, eſt égal à celui des parties GF & FH de la ſeconde (n). Or, le rectangle de ces deux N. 268.

dernieres parties, avec le quarré de leur demi-différence FE, eſt égal au quarré du
N. 187. rayon EH (n). Donc, le rectangle des parties CF & FD, avec le quarré de la demi-différence FE, eſt égal au quarré
N. 62. du rayon EH (n).

Par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXVI.

THÉORÊME.

270. *Si de deux lignes droites qui ſont tirées d'un même point hors d'un cercle à la circonférence de ce même cercle, l'une le coupe & l'autre le touche; le rectangle fait de la ſécante & de ſa partie extérieure, eſt égal au quarré de la tangente.*

Fig. 55 & 56. LE rectangle de la ſécante AC * & de ſa partie extérieure AD, eſt égal au quarré de la tangente AB.

La ſécante AC paſſe par le centre du cercle, ou elle n'y paſſe point.

PREMIER CAS.

Fig. 55. *Lorſque la ſécante AC * paſſe par le centre E.*

Conſt. Tirez du centre E au point de contact B, la ligne droite EB.

Démonſt. La ligne AC eſt diviſée en deux parties AD & DC, & le point E eſt le milieu de la partie DC (n). Donc, N. 35.
le rectangle des lignes AC & AD, avec le quarré de la ligne ED, eſt égal au quarré de la ligne EA. N. 190.

Mais, les quarrés des lignes AB & EB ſont auſſi égaux au quarré de la même ligne EA (n); puiſque le triangle ABE eſt N. 171.
rectangle en B (n). N. 246.

Donc, le rectangle précédent, avec le quarré de la ligne ED, eſt égal aux quarrés des lignes AB & EB (n). Par conſéquent, N. 62.
puiſque les lignes ED & EB ſont égales (n), ce rectangle eſt égal au quarré de la N. 35.
ligne AB (n). N. 64.

SECOND CAS.

Lorſque la ſécante AC * *ne paſſe point* Fig. 56.
par le centre E.

Conſt. Tirez du centre E aux points A, D & B, les lignes droites EA, ED & EB. Du même centre E, abaiſſez (n) N. 96.
la perpendiculaire EF à la corde DC.

Démonſt. La ligne AC eſt diviſée en deux parties au point D, & le point F eſt le milieu de la partie DC (n). Donc, le N. 228.
rectangle des lignes AC & AD, avec le

quarré de la ligne DF, eſt égal au quarré
N. 190. de la ligne AF (n). Par conſéquent, ce
même rectangle, avec les quarrés des lignes DF& FE, eſt égal à ceux des lignes
N. 63. AF & FE (n).

Mais, les quarrés des lignes DF & FE ſont égaux au quarré de la ligne ED: & ceux des lignes AF & FE le ſont au quarré
N. 171. de la ligne EA (n); puiſque les triangles DFE & AFE ſont rectangles l'un & l'autre en F [c]. Donc, le rectangle précédent, avec le quarré de la ligne ED,
N. 61. eſt égal au quarré de la ligne EA (n).

Or, les quarrés des lignes AB & EB ſont auſſi égaux au quarré de la même
N. 171. ligne EA (n); puiſque le triangle ABE eſt
N. 246. rectangle en B (n). Donc, le même rectangle précédent, avec le quarré de la ligne ED, eſt égal aux quarrés des lignes
N. 62. AB & EB (n). Par conſéquent, puiſque
N. 35. les lignes ED & EB ſont égales (n), ce rectangle eſt égal au quarré de la ligne
N. 64 AB (n).

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

271. Il ſuit de ce théorême, que *ſi plusieurs lignes droites qui ſont tirées d'un même point hors d'un cercle, à la circonférence de ce même cercle, le coupent; les rec-*

tangles faits de ces lignes & de leurs parties extérieures, chacun de chacune, sont égaux.

Le rectangle de la sécante AB * & de sa partie extérieure AE, est égal au rectangle de la sécante AC & de sa partie extérieure AF. Fig. 57.

Const. Du point A, tirez (n) la tangente AD au cercle X. N. 245.

Démonst. Le rectangle de la sécante AB & de sa partie extérieure AE; & celui de la sécante AC & de sa partie extérieure AF, sont égaux l'un & l'autre au quarré de la même tangente AD (n). N. 270.
Donc, ils le sont aussi entr'eux (n). N. 62.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

272. Il suit aussi de ce même théorême, *que les tangentes à un cercle, qui sont tirées d'un même point, sont égales.*

Les tangentes AB * & AC sont égales. Fig. 58.

Const. Tirez du point A une sécante quelconque AD.

Démonst. Le quarré de la tangente AB & celui de la tangente AC sont égaux l'un & l'autre, au rectangle de la sécante AD & de sa partie extérieure AE (n). N. 270.

62. Donc, ils sont aussi égaux entr'eux (n). Par conséquent, ces tangentes sont égales.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

273. Enfin, il suit de ce corollaire, que *d'un même point on ne peut tirer plus de deux tangentes au même cercle.*

Fig. 58. D'un point A*, on ne peut tirer plus de deux tangentes au cercle X.

Démonst. S'il étoit possible de tirer d'un point A plus de deux tangentes au cercle X, on pourroit, d'un point pris hors d'un cercle, tirer à la circonférence plus de deux lignes droites égales ; puisque les tangentes qui sont tirées d'un même point
N. 272. sont égales (n). Or, d'un point pris hors d'un cercle, on ne peut tirer à la circonférence plus de deux lignes droites égales
N. 233. (n). Donc, il est impossible de tirer d'un point A plus de deux tangentes au cercle X.

Par conséquent, C. Q. F. D.

USAGE.

274. *On peut se servir de ce théorême, de la maniere suivante, pour mesurer le dia-*
Fig. 59. *metre d'un cercle X* dans lequel on ne peut point entrer.*

On prend hors du cercle proposé, un point

A à volonté. De ce point, on tire, ſoit avec des cordes, ſoit autrement, deux tangentes AB & AC à ce même cercle. On diviſe enſuite en deux parties égales BAD & CAD, l'angle BAC formé par ces deux tangentes (n). *Enfin, on meſure l'une de ces mêmes* N. 90. *tangentes, par exemple la tangente AB; & la ligne AD, qui, ſi elle étoit prolongée, paſſeroit par le centre* (n). N. 233.

Or, le rectangle de la ſécante AE & de ſa partie extérieure AD eſt connu; puiſqu'il eſt égal (n) *au quarré de la tangente AB* N. 270. *que l'on vient de meſurer. La partie AD eſt auſſi connue, puiſque l'on vient auſſi de la meſurer. Ainſi, l'on diviſe par la valeur de cette partie, celle du quarré de cette tangente; & le quotient eſt la valeur de la ſécante AE.*

Enfin, lorſque l'on a trouvé cette valeur, on en retranche celle de cette même partie AD; & le reſte DE eſt la valeur du diametre demandé.

Donc, C. Q. F. F.



PROPOSITION XXXVII.

THÉORÊME.

275. *Si deux lignes droites, qui ſont tirées d'un même point hors d'un cercle à la circonférence, ſont telles que le rectangle fait de l'une & de ſa partie extérieure, ſoit égal au quarré de l'autre, cette autre eſt tangente à ce cercle.*

Fig. 60. SI le rectangle de la ſécante AC * & de ſa partie extérieure A D, eſt égal au quarré de la ligne AB, cette ligne AB eſt tangente au cercle X.

N. 245. *Conſt.* Tirez du point A (n), la tangente A F au cercle X. Tirez auſſi du même point A au centre E, la ligne droite AE.

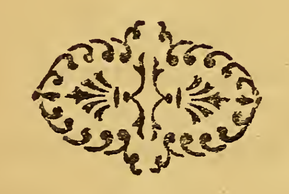
Démonſt. Le rectangle de la ſécante A C & de ſa partie extérieure A D, eſt
N. 270. égal au quarré de la tangente AF (n). Or, le même rectangle eſt auſſi égal au quarré de la ligne AB [H]. Donc, le quarré de cette tangente & celui de cette ligne, ſont
N. 62. égaux (n); & par conſéquent, ces deux lignes ſont égales.

Ainſi, dans les triangles AEB & AEF, le côté AB eſt égal au côté AF [D], le côté

EB au côté EF (n), & le côté AE eſt N. 35.
commun. Donc, l'angle B eſt égal à l'angle F (n); & par conſéquent, puiſque le N. 88.
dernier eſt un angle droit (n), le premier N. 246.
en eſt auſſi un.

Or, puiſque l'angle B eſt un angle droit, la ligne AB eſt perpendiculaire au rayon EB. Donc, puiſqu'elle eſt tirée de l'extrémité B de ce rayon [C], elle eſt tangente au cercle X (n). N. 242.

Par conſéquent, C. Q. F. D.



LES



LES ÉLÉMENS D'EUCLIDE.

LIVRE QUATRIEME.

EUCLIDE commence ce Livre par déterminer les conditions que des figures doivent avoir, afin que l'on puisse dire des unes, qu'elles sont inscrites dans les autres ; & des autres, au contraire, qu'elles sont circonscrites aux premieres. Il donne ensuite la maniere d'inscrire dans le cercle & de circonscrire au cercle, un triangle équiangle à un autre ; & de faire la même chose à l'égard de tous les polygones réguliers primitifs qu'il est possible d'y inscrire ou de lui circonscrire géométriquement. Enfin, il enseigne ce que l'on doit faire, tant pour inscrire le cercle dans un triangle & dans ces sortes de polygones, que pour le leur circonscrire.

DÉFINITIONS.

276. On dit d'une figure rectiligne, qu'elle est *inscrite* dans une autre, lorsque chaque angle de cette figure a son sommet dans la circonférence de cette autre.

Fig. 1. *La figure ABCD* * *est* inscrite *dans la figure EFGH.*

277. On dit d'une figure rectiligne, qu'elle est *circonscrite* à une autre, lorsque chaque côté de cette figure passe par le sommet de chaque angle de cette autre.

Fig. 1. *La figure EFGH* * *est* circonscrite *à la figure ABCD.*

278. On dit d'une figure rectiligne, qu'elle est *circonscrite* à un cercle, lorsque chaque côté de cette figure touche ce cercle.

Fig. 3. *La figure ABCD* * *est* circonscrite au *cercle X.*

279. On dit d'un cercle, qu'il est *inscrit* dans une figure rectiligne, lorsqu'il touche chaque côté de cette figure.

Fig. 3. *Le cercle X* * *est* inscrit *dans la figure ABCD.*

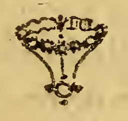
280. On dit d'un cercle, qu'il eſt *circonſcrit* à une figure rectiligne, lorſque la circonférence de ce cercle paſſe par le ſommet de chaque angle de cette figure.

Le cercle X * *eſt* circonſcrit *à la figure ABCD.* Fig. 2.

281. On dit d'une ligne droite, qu'elle eſt *inſcrite* dans un cercle, lorſqu'elle ſe termine de part & d'autre, à la circonférence de ce cercle.

Les lignes droites AB *, *BC, AD & DC, ſont* inſcrites *dans le cercle X.* Fig. 2.

282. Enfin, on dit que des figures ſont *régulieres*, lorſque tous leurs côtés ſont égaux; & que tous leurs angles le ſont auſſi.



PROPOSITION I.

PROBLÊME.

283. *Inſcrire dans un cercle donné, une ligne droite qui ſoit égale à une ligne droite donnée; pourvu cependant que cette ligne donnée, ne ſoit pas plus grande que le*
N. 240. *diametre de ce cercle* (n).

Fig. 4. IL faut inſcrire dans le cercle BECF *, une ligne droite qui ſoit égale à la ligne droite A.

Conſt. Prenez ſur la circonférence du cercle propoſé, un point B à volonté. De ce point, pris pour centre, & avec un rayon égal à la ligne A, décrivez l'arc de cercle F E G. Enfin, tirez du même point B au point E, ou F, la ligne droite BE, ou BF. Elle ſera la ligne demandée.

Démonſt. Le rayon du cercle FEG eſt égal à la ligne A [c]. Or, la ligne BE eſt un rayon de ce cercle [c]. Donc, elle eſt
N. 35. égale à la ligne A (n). D'ailleurs, elle eſt
N. 281. inſcrite dans le cercle BECF (n); puiſqu'elle ſe termine de part & d'autre, à la circonférence de ce cercle [c].

Par conſéquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION II.

PROBLÊME.

284. *Inſcrire dans un cercle donné, un triangle qui ſoit équiangle † à un triangle donné.*

IL faut inſcrire dans le cercle EGH *, un triangle qui ſoit équiangle au triangle ABC. Fig. 5.

Conſt. D'un point E, pris à volonté ſur la circonférence, tirez (n) la tangente DF au cercle propoſé. Décrivez ſur cette tangente (n), l'angle DEG qui ait le point de contact E pour ſommet, & ſoit égal à l'angle A; & l'angle FEH qui ait le même point E pour ſommet, & ſoit égal à l'angle C. Enfin, tirez du point G au point H, la corde GH. Le triangle GEH que cette corde forme avec les cordes EG & EH, eſt le triangle demandé. N. 243. N. 119.

Démonſt. L'angle H qui eſt dans le ſegment GHE, eſt égal à l'angle DEG du ſegment EKG (n). Or, l'angle A eſt auſſi égal au même angle DEG [c]. Donc, l'angle H eſt égal à l'angle A (n). N. 264. N. 62.

† On appelle *triangles équiangles*, ceux qui ont leurs angles égaux, chacun à chacun.

Pareillement, l'angle G qui eſt dans le ſegment EGH, eſt égal à l'angle FEH
N. 264. du ſegment EIH (n). Or, l'angle C eſt auſſi égal au même angle FEH [c]. Donc,
N. 62. l'angle G eſt égal à l'angle C (n).

Ainſi, le triangle GEH eſt équiangle
N. 137. au triangle ABC (n). D'ailleurs, il eſt
N. 276. inſcrit dans le cercle EGH (n), puiſque tous ſes angles ont leurs ſommets dans la circonférence de ce cercle [c].

Par conſéquent, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

285. *On auroit pareillement réſolu ce problême, en faiſant l'angle DEG égal à l'angle C, ou à l'angle B; & l'angle FEH égal à l'angle A, ou à l'angle B.*

C'eſt ſur ce problême & ſur la quatrieme propoſition du ſixieme livre, que toute la Trigonométrie devroit être fondée.



PROPOSITION III.

PROBLÊME.

286. *Circonſcrire à un cercle donné, un triangle qui ſoit équiangle à un triangle donné.*

Il faut circonſcrire au cercle DEF*, un triangle qui ſoit équiangle au triangle ABC. Fig. 6.

Conſt. Prolongez indéfiniment de part & d'autre, l'un des côtés du triangle ABC, par exemple le côté AC. Tirez le rayon GF, à volonté. Décrivez ſur ce rayon (n) l'angle FGE qui ait le centre N. 119.
G pour ſommet, & ſoit égal à l'angle BCM; & l'angle FGD qui ait auſſi le même centre G pour ſommet, & ſoit égal à l'angle BAL. Enfin (n), élevez du point N. 95.
F, la perpendiculaire HK au rayon GF; du point E, la perpendiculaire IK au rayon GE; & du point D, la perpendiculaire IH au rayon GD. Ces perpendiculaires forment un triangle HIK, qui eſt le triangle demandé.

Démonſt. Les angles GFK & GEK ſont deux angles droits [c]. Ainſi, puiſque la ſomme de tous les angles d'un qua-

drilatere eſt égale à celle de quatre angles
N. 140. droits (n), la ſomme des angles FGE & K eſt égale à celle de deux angles droits.

Mais, la ſomme des angles BCM & BCA, eſt auſſi égale à celle de deux an-
N. 97. gles droits (n). Donc, la ſomme des angles FGE & K eſt égale à celle des angles BCM
N. 62. & BCA (n). Par conſéquent, puiſque les angles FGE & BCM ſont égaux [c],
N. 64. les angles K & BCA le ſont auſſi (n).

Or, on démontre de la même maniere, que l'angle H eſt égal à l'angle BAC. Ainſi, le triangle HIK eſt équiangle au
N. 137. triangle ABC (n). D'ailleurs, il eſt cir-
N. 278. conſcrit au cercle DEF (n), puiſque tous
N. 242. ſes côtés touchent ce cercle (n).

Par conſéquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION IV.

PROBLÊME.

287. *Inſcrire un cercle, dans un triangle donné.*

IL faut inſcrire un cercle dans le trian-
Fig. 7. gle ABC *.

N. 90. *Conſt.* Diviſez (n) deux des angles du triangle propoſé, par exemple, les angles A & C, chacun en deux parties égales

DAB & DAC, DCB & DCA. Du point D, auquel les lignes DA & DC se rencontrent, abaissez (n) la perpendiculaire DG au côté AC. Enfin, du même point D, pris pour centre, & avec cette perpendiculaire prise pour rayon, décrivez le cercle EGF : il sera le cercle demandé. N. 96.

Pour la démonstration. Abaissez (n) du même point D, la perpendiculaire DE au côté AB ; & la perpendiculaire DF au côté BC. N. 96.

Démonst. Dans les triangles DAE & DAG, qui sont rectangles l'un en E & l'autre en G, l'angle DAB est égal à l'angle DAC [c], & le côté DA est commun. Ainsi, les perpendiculaires DE & DG sont égales (n). N. 123.

Or, on démontre de la même maniere, l'égalité des perpendiculaires DF & DG. Donc, puisque [c] cette derniere est un rayon du cercle EGF, les deux autres DE & DF sont aussi des rayons du même cercle (n). N. 33.

Mais [c], tous les côtés du triangle ABC passent par les extrémités G, E & F de ces rayons ; & sont perpendiculaires à ces mêmes rayons. Donc, le cercle EGF touche tous les côtés de ce triangle (n) ; N. 242.
& par conséquent, il y est inscrit (n). N. 279.

Donc, C. Q. F. F.

PROPOSITION V.

PROBLÊME.

288. *Circonſcrire un cercle, à un triangle donné.*

IL faut circonſcrire un cercle, au trian-
Fig. 8. gle ABC *.

N. 93. *Conſt.* Diviſez (n) deux des côtés du triangle propoſé, par exemple, les côtés AB & AC, chacun en deux parties égales AD & DB, AE & EC. Du point D,
N. 95. élevez (n) la perpendiculaire DF au côté AB; & du point E, la perpendiculaire EF au côté AC. Du point F, auquel ces perpendiculaires ſe rencontrent, tirez au point A la ligne droite FA. Enfin, du même point F pris pour centre, & avec cette ligne FA priſe pour rayon, décrivez le cercle AGC : il ſera le cercle demandé.

Pour la démonſtration. Tirez du point F aux points B & C, les lignes droites FB & FC.

Démonſt. Dans les triangles BDF & ADF, qui ſont rectangles l'un & l'autre en D [c], le côté DB eſt égal au côté DA [c], & le côté DF eſt commun.

Ainsi, le côté FB est égal au côté FA (n). N. 82.

Or, on démontre de la même maniere, l'égalité des lignes FC & FA. Donc, puisque [c] cette derniere est un rayon du cercle AGC, les deux autres FB & FC sont aussi des rayons du même cercle (n). N. 35.

Mais [c], chaque angle A, B & C, du triangle ABC, a pour sommet l'extrémité de l'un de ces rayons. Donc, la circonférence du cercle AGC passe par les sommets de tous les angles de ce triangle (n); & par conséquent, ce cercle est N. 35. circonscrit à ce triangle (n). N. 280.

Donc, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

289. *On propose quelquefois ce probléme, de la maniere suivante:* Faire passer la circonférence d'un cercle par trois points donnés A*, B & C; pourvu cependant Fig. 8. que ces trois points ne soient pas dans une même ligne droite.

Pour le résoudre, on joint les trois points donnés, par des lignes droites AB, AC & BC; & l'on a un triangle ABC, auquel on circonscrit un cercle (n). N. 288.



PROPOSITION VI.

PROBLÊME.

290. *Inſcrire un quarré, dans un cercle donné.*

IL faut inſcrire un quarré dans le cercle
Fig. 9. FGH *..

Conſt. Tirez un diametre AC, à vo-
N. 95. lonté. Elevez (n) un autre diametre BD, perpendiculaire à ce diametre AC. Tirez du point A aux points B & D, les lignes droites AB & AD; & du point C aux mêmes points B & D, les lignes droites CB & CD. Le quadrilatere ABCD que ces lignes forment, eſt le quarré demandé.

Démonſt. Les angles AEB, BEC, CED, &c. qui ont chacun leur ſommet
N. 19. au centre E, ſont égaux (n). Donc, les arcs AFB, BGC, CHD, &c. le ſont
N. 256. auſſi (n); & par conſéquent, les cordes
N. 260. AB, BC, CD, &c. ſont égales (n).

De plus, les angles A, B, C, &c.
N. 263. ſont des angles droits (n); puiſque [c] ils ſont inſcrits chacun dans un demi-cercle. Donc, le quadrilatere ABCD a tous ſes côtés égaux, & tous ſes angles droits; &
N. 50. par conſéquent, il eſt quarré (n).

Or, ce quarré est inscrit dans le cercle FGH (n); puisque tous ses angles ont N. 276. leurs sommets dans la circonférence de ce cercle [c].

Donc, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

291. Il suit de ce problême: Premiérement, que *pour inscrire dans le cercle un octogone régulier, il faut commencer par y inscrire un quarré: & diviser ensuite en deux parties égales* (n), *chaque arc AFB**, N. 261. Fig. 9. *BGC, &c, afin d'avoir des arcs AF, FB, BG, &c. qui soient chacun la huitieme partie de la circonférence.*

Secondement, que *pour inscrire dans le cercle un polygone régulier de 16 côtés, il faut commencer par y inscrire un octogone régulier: & diviser ensuite* (n) *chaque arc AF *, FB, &c. en deux parties* N. 261. Fig. 9. *égales; afin d'avoir des arcs qui soient chacun la seizieme partie de la circonférence.*

Et ainsi de suite, pour inscrire dans le cercle les polygones réguliers de 32 côtés, de 64 côtés, &c.



PROPOSITION VII.

PROBLÊME.

292. *Circonſcrire un quarré, à un cercle donné.*

Il faut circonſcrire un quarré au cercle
Fig. 10. ABCD *.

Conſt. Tirez un diametre AC, à vo-
N. 95 lonté. Elevez (n) un autre diametre BD perpendiculaire à ce diametre AC. Elevez
N. 95. auſſi (n) des points A & C, les perpendiculaires EH & FG au même diametre AC; & des points B & D, les perpendiculaires EF & HG au diametre BD. Le quadilatere HF que ces perpendiculaires forment, eſt le quarré demandé.

Démonſt. Les lignes EH, BD & FG,
N. 129. ſont paralleles (n); puiſqu'elles ſont perpendiculaires chacune à la même ligne AC [c]: & les lignes EF, AC & HG,
N. 129. ſont auſſi paralleles (n), puiſqu'elles ſont auſſi perpendiculaires chacune à la même ligne BD [c].

Ainſi, *Premiérement.* Les quadrilateres
N. 57. HB & AF ſont parallélogrammes (n). Donc, les côtés EH & BD ſont égaux,

& les côtés EF & AC le sont aussi (n). N. 143.
Par conséquent, puisque le côté BD est
égal au côté AC (n), le côté EH l'est au N. 35.
côté EF (n). N. 62.

Secondement. Le quadrilatere A B est
aussi parallélogramme (n). Donc, puisque N. 57.
l'angle AIB est un angle droit (n), l'angle N. 21.
E en est aussi un (n). N. 143.

Troisiémement. Enfin, le quadrilatere
HF est encore parallélogramme (n). Donc, N. 57.
puisque [D] il a deux côtés de suite égaux
EH & EF, & un angle droit E, il est
quarré (n). N. 146.

Or, ce quarré est circonscrit au cercle
ABCD (n); puisque tous ses côtés tou- N. 278.
chent ce cercle (n). N. 242.

Par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION VIII.

PROBLÊME.

293. *Inscrire un cercle, dans un quarré donné.*

Il faut inscrire un cercle, dans le quarré
HF *. Fig. 10.

Const. Tirez les diagonales EG & HF.
Du point I, auquel ces diagonales se cou-
pent, abaissez (n), la perpendiculaire ID N. 96.

au côté HG. Enfin, du même point I, pris pour centre, & avec cette perpendiculaire prise pour rayon, décrivez le cercle DCBA ; il sera le cercle demandé.

N. 96. *Pour la démonstration.* Abaissez (n) du même point I, les perpendiculaires IC, IB & IA aux côtés FG, EF & EH, chacune à chacun.

Démonst. Le quadrilatere DC est quarré
N. 186. (n). Ainsi, les côtés IC & ID sont égaux
N. 50. (n).

Or, on démontre de la même maniere, l'égalité des autres perpendiculaires IC & IB, IB & IA. Donc, puisque [c] la perpendiculaire ID est un rayon du cercle DCBA, ces autres perpendiculaires sont
N. 35. aussi des rayons du même cercle (n).

Mais [c], tous les côtés du quarré HF passent par les extrémités D, C, &c. de ces rayons ; & sont perpendiculaires à ces mêmes rayons. Donc, le cercle DCBA
N. 242. touche tous les côtés de ce quarré (n) ; &
N. 279. par conséquent, il y est inscrit (n).

Donc, C. Q. F. F.



PROPOSITION IX.

PROBLÊME.

294. *Circonſcrire un cercle, à un quarré donné.*

IL faut circonſcrire un cercle au quarré ABCD *. Fig. 9.

Conſt. Tirez les diagonales AC & BD. Du point E, auquel ces diagonales ſe coupent, pris pour centre, & avec la ligne EA, priſe pour rayon, décrivez le cercle FGH ; il ſera le cercle démandé.

Démonſt. Dans le triangle AEB, les angles CAB & DBA ſont chacun la moitié d'un angle droit (n) ; puiſque les N. 138.
triangles ABC & BAD ſont rectangles & iſoſceles (n). Ainſi, le côté EB eſt égal N. 50.
au côté EA (n). N. 86.

Or, on démontre de la même maniere l'égalité des lignes EB & EC, EC & ED. Donc, puiſque la ligne EA eſt un rayon du cercle FGH [c], ces autres lignes ſont auſſi des rayons du même cercle (n). N. 35.

Mais, chaque angle A, B, &c. du quarré ABCD, a pour ſommet l'extrémité de l'un de ces rayons [c]. Donc, la circonférence du cercle FGH paſſe par les

ſommets de tous les angles de ce quarré
N. 35 (n) ; & par conſéquent, ce cercle eſt
N. 280. circonſcrit à ce quarré (n).

Donc, C. Q. F. F.

PROPOSITION X.

PROBLÊME.

295. *Décrire ſur une ligne droite donnée, un triangle iſoſcele, dont chacun des angles égaux, ſoit double de ſon autre angle.*

Fig. 11. IL faut décrire ſur la ligne droite AB* un triangle iſoſcele, dont chacun des angles égaux ſoit double de ſon autre angle.

N. 203. *Conſt.* Diviſez (n) la ligne AB en deux parties AC & CB, qui ſoient telles que le rectangle de cette ligne & de ſa petite partie CB, ſoit égal au quarré de ſa grande partie AC. Du point A, pris pour centre, & avec la même ligne AB priſe pour rayon, décrivez un arc de cercle BDG, indéfini. Du point B pris pour centre, & avec la partie AC priſe pour rayon, décrivez un arc de cercle qui coupe le précédent à un point D. Enfin, tirez de ce point aux points A & B, les lignes droites DA & DB. Le triangle BAD, que ces lignes

forment avec la ligne AB, eſt le triangle demandé.

Pour la démonſtration. Tirez du point C au point D, la ligne droite CD; & (n) circonſcrivez le cercle A C D E au triangle ACD. N. 288.

Démonſt. Le réctangle de la ligne AB & de ſa partie CB, eſt égal au quarré de la partie AC [c]. Donc, il eſt auſſi égal à celui de la ligne BD; puiſque cette ligne & cette derniere partie ſont égales [c]. Ainſi, la ligne BD eſt tangente au cercle A C D E (n). Donc, l'angle C D B eſt l'angle du ſegment CFD (n). Par conſéquent, il eſt égal à l'angle A, dans le ſegment CED (n). N. 275. N. 221. N. 264.

Or, l'angle DCB, qui eſt extérieur au triangle ACD, eſt égal (n) à la ſomme des angles intérieurs CDA & A qui lui ſont oppoſés. Donc (n), il eſt auſſi égal à celle des angles CDA & CDB, (n); & par conſéquent, à l'angle BDA (n). N. 135. N. 61. N. 72.

Mais, l'angle B eſt auſſi égal au même angle BDA (n), puiſque les côtés AD & AB du triangle BAD ſont égaux (n). Donc, l'angle DCB eſt égal à l'angle B (n); & par conſéquent, les côtés BD & CD du triangle BDC ſont égaux (n). N. 84. N. 35. N. 62. N. 86.

Or, puiſque le côté BD qui eſt égal au

côté AC [c], l'eſt auſſi au côté CD, les côtés AC & CD du triangle ACD ſont
N. 61. égaux (n). Donc, l'angle CDA eſt auſſi
N. 84. égal à l'angle A (n).

Enfin, puiſque les angles CDA & CDB ſont égaux chacun au même angle A; l'angle BDA, qui eſt la ſomme de ces deux premiers angles, eſt double de l'angle A.

Par conſéquent, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

296. Il ſuit de ce problême, que *ſi l'angle formé par les côtés égaux d'un triangle iſoſcele, eſt la moitié de chacun des deux autres angles; il eſt les deux cinquiemes d'un angle droit.*

Fig. 12. Dans le triangle BAC * l'angle A qui eſt la moitié de chacun des deux autres angles ABC & ACB, eſt les deux cinquiemes d'un angle droit.

N. 90. *Conſt.* Diviſez (n) en deux parties égales, chaque angle ABC & ACB.

Démonſt. Les cinq angles A, ABD, CBD, ACE & BCE, ſont égaux [c]. Ainſi, ils ſont chacun la cinquieme partie de la ſomme des trois angles du triangle BAC. Mais, cette ſomme eſt égale à
N. 136. celle de deux angles droits (n). Donc,

chaque angle A, ABD, &c. eſt la cinquieme partie de la ſomme de deux angles droits; & par conſéquent, les deux cinquiemes d'un angle droit.

Donc, C. Q. F. D.

SCHOLIE.

297. *Si l'on vouloit que la ligne donnée AB* fût le côté adjacent aux angles égaux du triangle demandé, on commenceroit par décrire ſur cette ligne le triangle BAD, de la même maniere dont on vient de le faire. On décriroit enſuite ſur cette même ligne* (n) *un angle qui fût égal à l'angle B, & qui eût le point A pour ſommet. Enfin, on prolongeroit le côté de cet angle & le côté BD de l'angle B, jusqu'à ce qu'ils ſe rencontraſſent. Le triangle que ces côtés prolongés formeroient avec la ligne AB, ſeroit le triangle demandé.*

* Fig. 11.

(n) N. 119.



PROPOSITION XI.

PROBLÊME.

298. *Inſcrire dans un cercle donné, un pentagone régulier.*

Fig. 13. Il faut inſcrire dans le cercle ACE * un pentagone régulier.

N. 295. *Conſt.* Décrivez (n) ſur une ligne droite GF priſe à volonté, le triangle iſoſcele FGH, dont chaque angle F & H, ſoit
N. 284. double de l'angle G. Inſcrivez (n) dans le cercle A C E, le triangle E B D qui ſoit
N. 90. équiangle à ce triangle FGH. Diviſez (n) chaque angle BED & BDE en deux parties égales BEC & CED, BDA & ADE †. Enfin, tirez du point B aux points A & C, les lignes droites BA & BC; du point E aux points A & D, les lignes droites EA & ED; & du point C au point D, la ligne droite CD. Le polygone ABCDE que ces lignes forment, eſt le pentagone demandé.

Démonſt. Tous les angles BEC, CED, EBD, ADE & BDA, ſont égaux, puiſ-

† Dans la pratique, il ſuffit de faire les arcs EA & D C égaux chacun à l'arc ED; & de tirer enſuite les lignes BA, BC, &c.

que chaque angle BED & BDE eſt double de l'angle EBD [c]. Donc, tous les arcs BC, CD, DE, EA & AB, ſont auſſi égaux (n). Par conſéquent, toutes les N. 255.
cordes BC, CD, &c. ſont égales (n). N. 260.

Mais, puiſque tous les arcs BC, CD, &c. ſont égaux, les arcs AEDC, BAED, CBAE, &c. ſur leſquels s'appuient les angles ABC, BCD, CDE, &c. le ſont auſſi. Par conſéquent, tous ces angles ſont égaux (n). N. 257.

Ainſi; tous les côtés du pentagone ABCDE ſont égaux, & tous ſes angles le ſont auſſi. Donc, ce pentagone eſt régulier. D'ailleurs, il eſt inſcrit dans le cercle ACE (n), puiſque tous ſes angles ont N. 276.
leurs ſommets dans la circonférence de ce cercle [c].

Par conſéquent, C. Q. F. F.

COROLLAIRE I.

299. Il ſuit de ce problême: Premiérement, que *pour inſcrire dans le cercle un décagone régulier, il faut commencer par y inſcrire un pentagone régulier: & diviſer enſuite chaque arc AB*, BC, &c. en deux* Fig. 13.
parties égales (n); *afin d'avoir des arcs qui* N. 261.
ſoient chacun la dixieme partie de la circonférence.

Secondement, que *pour inſcrire dans*

le cercle un polygone régulier de 20 *côtés, il faut commencer par y inſcrire un décagone régulier : & diviſer enſuite en deux*
N. 261. *parties égales* (n), *chaque arc de ce décagone ; afin d'avoir des arcs qui ſoient chacun la vingtieme partie de la circonférence.*

Et ainſi de ſuite, pour inſcrire dans le cercle les polygones réguliers de 40 *côtés, de* 80 *côtés, &c.*

COROLLAIRE II.

300. Il ſuit auſſi de la démonſtration de ce même problême, que *chaque angle d'un pentagone régulier eſt les ſix cinquiemes d'un angle droit ; & par conſéquent de* 108 *degrés.*

PROPOSITION XII.

PROBLÊME.

301. *Circonſcrire à un cercle donné, un pentagone régulier.*

Fig. 14. Il faut circonſcrire au cercle ACD*, un pentagone régulier.

N. 298. *Conſt.* Inſcrivez (n), dans le cercle ACD, le pentagone régulier ABCDE. Tirez enſuite du centre L à chaque angle A,

A, B, C, &c. les rayons LA, LB, LC, &c. Enfin (n) élevez du point A, N. 95.
la perpendiculaire KF au rayon LA; du point B, la perpendiculaire FG au rayon LB; du point C, la perpendiculaire GH au rayon LC; & ainsi de suite. Ces perpendiculaires forment un polygone FGHIK, qui est le pentagone demandé.

Pour la démonstration. Tirez du centre L à chaque angle F, G, H, &c. les lignes droites LF, LG, LH, &c.

Démonst. Premiérement. Les lignes FA & FB sont perpendiculaires aux rayons LA & LB, & élevées des extrémités A & B de ces mêmes rayons. Donc, elles sont tangentes au cercle ACE (n). Par con- N. 242.
séquent, puisqu'elles sont tirées du même point F, elles sont égales (n). Et par des N. 272.
raisons pareilles, les lignes GB & GC, HC & HD, &c. le sont aussi.

Ainsi, dans les triangles LAF & LBF, le côté LA est égal au côté LB (n), le côté N. 35.
LF est commun, & le côté FA est égal au côté FB [D]. Donc, les angles FLA & FLB sont égaux (n); & par conséquent, N. 88.
l'angle FLB est la moitié de l'angle ALB.

Or, on démontre de la même maniere, que l'angle GLB est la moitié de l'angle CLB. Donc, puisque les angles ALB & CLB qui s'appuient sur les arcs égaux AB

N. 258. & CB, ſont égaux (n), les angles FLB &
Ij. 68. GLB le ſont auſſi (n).

Ainſi, dans les triangles LBF & LBG qui ont le côté LB de commun, & ſont rectangles l'un & l'autre en B [C], l'angle FLB eſt égal à l'angle GLB. Donc, les côtés
N. 123. FB & GB ſont égaux (n). Et par des raiſons pareilles, les côtés GC & HC, HD & ID, &c. le ſont auſſi.

Donc, toutes les lignes FA, FB, GB, GC, &c. ſont égales. Par conſéquent, tous les côtés KF, FG, GH, &c. ſont égaux.

Secondement. Les angles LFA, &
N. 88. LFB ſont égaux (n); puiſque les triangles LAF & LBF ont tous leurs côtés égaux, chacun à chacun [D]. Les angles LFB &
N. 137. LGB ſont auſſi égaux (n); puiſque les triangles LBF & LBG, qui ſont rectangles l'un & l'autre en B [C], ont l'angle FLB égal à l'angle GLB [D]. Les angles
N. 88. LGB & LGC ſont encore égaux (n); puiſque les triangles LBG & LCG ont tous leurs côtés égaux, chacun à chacun [D], & ainſi de ſuite. Donc, tous les angles LFA, LFB, LGB, LGC, &c. ſont égaux. Par conſéquent, tous les angles KFG, FGH, GHI, &c. le ſont auſſi.

Ainſi, tous les côtés du pentagone FGHIK ſont égaux; & tous ſes angles le

ſont auſſi. Donc, ce pentagone eſt régulier. D'ailleurs, il eſt circonſcrit au cercle ACD (n); puiſque tous ſes côtés touchent N. 278.
ce cercle (n). N. 242.

Par conſéquent, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

302. Il ſuit de la conſtruction de ce problême, que *pour circonſcrire à un cercle un polygone régulier quelconque, il faut commencer par y en inſcrire un ſemblable à celui que l'on veut lui circonſcrire. Enſuite, du centre de ce cercle, on tire des rayons à chaque angle de ce polygone. Enfin, des extrémités de ces rayons, on éleve* (n) *des* N. 95.
perpendiculaires à ces mêmes rayons, chacune à chacun.

PROPOSITION XIII.

PROBLÊME.

303. *Inſcrire un cercle, dans un pentagone régulier.*

IL faut inſcrire un cercle dans le pentagone ABCDE *. Fig. 15.

Conſt. Diviſez (n) deux des angles du N. 90.
pentagone propoſé, par exemple, les an-

gles A & B, chacun en deux parties égales FAE & FAB, FBA & FBC. Du point F, auquel les lignes FA & FB se rencon-
N. 96. trent, abaissez (n) la perpendiculaire FG au côté AB. Enfin, du même point F, pris pour centre, & avec cette perpendiculaire prise pour rayon, décrivez le cercle GIL; il sera le cercle demandé.

N. 96. *Pour la démonstration.* Abaissez (n) du même point F, la perpendiculaire FH au côté BC; la perpendiculaire FI au côté CD; & ainsi de suite. Du même point F, tirez aux angles C, D & E, les lignes droites FC, FD & FE.

Démonst. Premiérement. Dans les triangles BFH & BFG, qui ont le côté BF de commun, & sont rectangles l'un en H & l'autre en G [c], l'angle FBC est égal à l'angle FBA [c]. Donc, les perpendi-
N. 123. culaires FH & FG sont égales (n).

Secondement. Dans les triangles BFA & BFC, l'angle FBA est égal à l'angle FBC [c], le côté BA au côté BC [H], & le côté BF est commun. Donc, les angles
N. 82. FAB & FCB sont égaux (n).

Mais, les angles EAB & DCB sont aussi égaux [H]. Donc, puisque l'angle FAB est la moitié du premier [c], l'angle FCB
N. 68. est la moitié du second (n). Par conséquent, les angles FCB & FCD sont égaux,

Et par des raiſons pareilles, les angles FDC & FDE, FED & FEA le ſont auſſi.

Or, après avoir ainſi établi l'égalité de ces angles, on démontre celle des perpendiculaires FH & FI, FI & FK, &c. de la même maniere dont on vient de démontrer l'égalité des perpendiculaires FH & FG. Donc, puiſque cette derniere eſt un rayon du cercle GIL [c], les autres ſont auſſi des rayons du même cercle (n). N. 35.

Mais, tous les côtés du pentagone ABCDE paſſent par les extrémités G, H, I, &c. de ces rayons, & ſont perpendiculaires à ces mêmes rayons [c]. Donc, le cercle GIL touche tous les côtés de ce pentagone (n). Par conſéquent, il y eſt inſcrit (n). N. 241. N. 279.

Donc, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

304. Il ſuit de la conſtruction de ce problême, que *pour inſcrire un cercle dans un polygone régulier quelconque, il faut faire préciſément les mêmes choſes que s'il s'agiſſoit d'en inſcrire un dans un pentagone régulier.*



PROPOSITION XIV.

PROBLÊME.

305. *Circonſcrire un cercle à un pentagone régulier.*

IL faut circonſcrire un cercle au pentagone
Fig. 16. ABCDE *.

N. 90. *Conſt.* Diviſez (n) deux des angles du pentagone propoſé, par exemple, les angles A & B, chacun en deux parties égales FAE & FAB, FBA & FBC. Du point F, auquel les lignes FA & FB ſe rencontrent, pris pour centre, & avec la ligne FA, priſe pour rayon, décrivez le cercle ACE; il ſera le cercle demandé.

Pour la démonſtration. Tirez du point F aux points C, D & E, les lignes droites FC, FD & FE.

Démonſt. Dans le triangle AFB, les
N. 68. angles FAB & FBA ſont égaux (n); puiſque [C] ils ſont les moitiés, l'un de l'angle EAB, & l'autre de l'angle ABC, qui ſont égaux [H]. Donc, les lignes FB & FA ſont
N. 86. égales (n).

Or, après avoir établi, de même qu'au n° 303 †, l'égalité des angles FCB &

† Liſez ſur la figure 16, le *ſecondement de la* démonſtration du n° 303.

FCD, FDC & FDE, &c. on démontre celle des lignes FB & FC, FC & FD, &c. de la même maniere dont on vient de démontrer l'égalité des lignes FB & FA. Donc, puiſque cette derniere eſt un rayon du cercle ACE [c], les autres ſont auſſi des rayons du même cercle (n). N. 35.

Mais, chaque angle A, B, &c. du pentagone ABCDE a pour ſommet l'extrémité de l'un de ces rayons [c]. Donc, la circonférence du cercle ACE paſſe par les ſommets de tous les angles de ce pentagone (n). Par conſéquent, ce cercle eſt N. 35.
circonſcrit à ce pentagone (n). N. 280.

Donc, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

306. Il ſuit de ce problême, que *pour circonſcrire un cercle à un polygone régulier quelconque, il faut faire préciſément les mêmes choſes que s'il s'agiſſoit d'en circonſcrire un à un pentagone régulier.*



PROPOSITION XV.

PROBLÊME.

307. *Inſcrire dans un cercle donné, un exagone régulier.*

Fig. 17. IL faut inſcrire dans le cercle ACE *, un exagone régulier.

Conſt. Prenez ſur la circonférence du cercle propoſé, un point A à volonté. De ce point pris pour centre, & avec un rayon égal à celui de ce même cercle, décrivez deux arcs qui coupent la circonférence, l'un à un point B, & l'autre à un point F. Des points B, A & F, tirez par le centre G, les lignes droites BE, AD & FC. Enfin, tirez du point A aux points B & F, les lignes droites AB & AF; du point C aux points B & D, les lignes droites CB & CD; & du point E, aux points D & F, les lignes droites ED & EF. Le polygone ABCDEF que ces lignes forment, eſt l'exagone demandé.

Démonſt. Le triangle AGB eſt équilatéral [c]. Ainſi, l'angle AGB eſt les
N. 139. deux tiers d'un angle droit (n); & par la même raiſon, il en eſt de même de l'an-

gle AGF. Donc, puiſque les trois angles AGB, AGF & FGE, valent enſemble deux angles droits (n), l'angle FGE eſt N. 97.
auſſi les deux tiers d'un angle droit.

Mais (n), l'angle DGE eſt égal à l'an- N. 101.
gle AGB; l'angle DGC à l'angle AGF; & l'angle BGC à l'angle FGE. Donc, tous les angles qui ont leur ſommet au centre G, ſont égaux (n). Ainſi, tous les arcs N. 62.
AB, BC, CD, &c. le ſont auſſi (n). N. 256.
Par conſéquent, toutes les cordes AB, BC, CD, &c. ſont égales (n). N. 260.

Mais, puiſque tous les arcs AB, BC, &c. ſont égaux, les arcs AEC, BFD, CAE, &c. ſur leſquels s'appuient les angles ABC, BCD, CDE, &c. le ſont auſſi. Par conſéquent, tous ces angles ſont égaux (n). N. 257.

Ainſi, tous les côtés de l'exagone ABCDEF ſont égaux; & tous ſes angles le ſont auſſi. Donc, cet exagone eſt régulier. D'ailleurs, il eſt inſcrit dans le cercle ACE (n); puiſque [c] tous ſes angles N. 276.
ont leurs ſommets dans la circonférence de ce cercle.

Par conſéquent C. Q. F. F.

COROLLAIRE I.

308. Il ſuit de ce problême : Premiérement, que *pour inſcrire dans le cercle un triangle équilatéral, il faut commencer par*

Fig. 17. *y inſcrire un exagone régulier ABCDEF* : & tirer enſuite des lignes droites, du point A au point C, du point C au point E, & du point E au point A.*

Secondement, que *pour inſcrire dans le cercle un dodécagone régulier, il faut commencer de même par y inſcrire un exagone régulier : & diviſer enſuite chaque arc AB, BC, &c. en deux parties égales*
N. 261. (n) ; *afin d'avoir des arcs qui ſoient chacun la douzieme partie de la circonférence.*

Et ainſi de ſuite, pour inſcrire dans le cercle les polygones réguliers de 24 côtés, de 48 côtés, &c.

COROLLAIRE II.

309. Il ſuit de la démonſtration de ce même problême, que *chaque angle d'un exagone régulier, eſt les quatre tiers d'un angle droit ; & par conſéquent, de 120 degrés.*

COROLLAIRE III.

310. Il ſuit encore de la démonſtration de ce même problême, que *le côté de l'exagone régulier, eſt égal au rayon du cercle dans lequel cet exagone eſt inſcrit.*

COROLLAIRE IV.

311. Enfin, il ſuit de ce corollaire, que *pour inſcrire dans le cercle un exagone régulier, il ſuffit de prendre avec un compas la grandeur du rayon; & de la porter ſix fois ſur la circonférence.*

PROPOSITION XVI.

PROBLÊME.

312. *Inſcrire dans un cercle donné, un pentédécagone régulier.*

IL faut inſcrire dans le cercle DEG*, un pentédécagone régulier. Fig. 18.

Conſt. Inſcrivez dans le cercle propoſé, le triangle équilatéral ABC (n); & le pentagone régulier DBEFG (n). L'arc AG, qui ſe trouve intercepté entre l'angle A du triangle équilatéral & l'angle G du pentagone, eſt la quinzieme partie de la circonférence. N. 308. N. 298.

Démonſt. L'arc BDA eſt le tiers de la circonférence [c]; & l'arc BDAG en eſt les deux cinquiemes [c]. Or, $\frac{1}{3}$ vaut $\frac{5}{15}$;

& $\frac{2}{5}$ valent $\frac{6}{15}$. Donc, l'arc AG est un quinzieme.

Par conséquent, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

313. Il suit de ce problême, que *pour inscrire dans le cercle un polygone régulier de 30 côtés, il faut commencer par y inscrire un pentédécagone régulier: & diviser*
N. 261. *ensuite* (n) *l'arc AG, en deux parties égales; afin d'avoir des arcs qui soient chacun la trentieme partie de la circonférence.*

Et ainsi de suite, pour inscrire dans le cercle les polygones réguliers de 60 côtés, de 120 côtés, &c.

SCHOLIE.

314. *Il faut remarquer que l'on ne peut inscrire géométriquement dans le cercle, aucun polygone régulier différent de ceux dont il est parlé dans ce Livre.*

On peut aussi faire les remarques suivantes:

Si l'on porte le rayon sur le quart de la circonférence, le reste est l'arc du dodécagone.

Et si l'on porte le rayon sur l'arc du pentagone, le reste est l'arc du polygone de 30 côtés.

Si l'on porte le côté du pentagone ſur le quart de la circonférence, le reſte eſt l'arc du polygone de 20 côtés.

Mais ſi l'on porte le côté du pentagone deux fois ſur la demi-circonférence, le reſte eſt l'arc du décagone.

Si l'on porte le côté du décagone ſur l'arc de l'exagone, le reſte eſt l'arc du pentédécagone.

Mais ſi l'on porte le côté de l'octogone ſur l'arc de l'exagone, le reſte eſt l'arc du polygone de 24 côtés.

Et ainſi de ſuite, pour trouver géométriquement pluſieurs arcs d'un certain nombre de degrés. Mais on ne parviendra jamais, ni par ceete voie, ni vraiſemblablement par aucune autre, à trouver géométriquement les arcs de 1 degré, de 2 degrés, de 4 degrés; & ainſi de ſuite, en doublant.





LES ÉLÉMENS D'EUCLIDE.

LIVRE CINQUIEME.

Jusqu'ici on n'a considéré les lignes & les surfaces qu'en elles-mêmes. Il s'agit à présent de comparer entr'elles les premieres ; de faire la même chose à l'égard des dernieres ; & de déterminer l'égalité, ou l'inégalité, des rapports qui résultent de ces comparaisons. Mais, il est nécessaire d'avoir auparavant une connoissance exacte des rapports en général ; & c'est à la donner, cette connoissance, qu'Euclide destine ce cinquieme Livre. Il le commence par les définitions des termes qui sont en usage dans les comparaisons. Il établit ensuite les principes des rapports ; compare ces rapports

les uns aux autres ; donne des regles pour connoître leur égalité, ou leurs différentes ſortes d'inégalités ; & démontre les propriétés de ceux qui ſont égaux.

Ce Livre renferme les regles d'une excellente logique ; & la matiere qui y eſt traitée fait l'ame de la Géométrie. Mais il eſt ſi obſcur dans ſon Auteur, ſi chargé de propoſitions inutiles, & en même temps ſi défectueux par le nombre de propoſitions néceſſaires qui ne s'y trouvent point, que l'on a été obligé d'y faire les changemens les plus conſidérables.

Ainſi, l'on en a ſupprimé l'inutile ; & l'on y a ajouté tout ce qui eſt néceſſaire pour en faire un traité complet des rapports. Par conſéquent, l'ordre dans lequel les propoſitions y ſont rangées, n'eſt plus celui qu'Euclide a ſuivi. Mais, comme cet Auteur eſt cité par tous les Géometres antérieurs à l'année 1730, *on a eu ſoin, à chaque propoſition que l'on a conſervée, d'indiquer par une note la date originale.*

Enfin, on l'a terminé par pluſieurs queſtions, afin de donner quelque idée de l'uſage des proportions.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

COMME on ne traite ici des rapports qu'en général, on s'y sert des lettres de l'alphabet pour représenter les quantités en général. Ainsi, ces lettres a, b, c, d, *&c. signifient également des nombres, des lignes, des surfaces, des corps, des sons, des temps, des vitesses, &c. Par conséquent, on pourra toujours leur substituer celles de ces quantités que l'on voudra.*

Et pour s'exprimer de la maniere la plus courte qu'il est possible, on se sert de ce signe +, pour représenter ce mot, plus; *& de cet autre signe —, pour tenir lieu de cet autre mot,* moins. *Ainsi, cette expression* a + b, *signifie* la somme *des quantités qui sont représentées par les lettres* a *&* b: *& celle-ci,* a — b, *signifie leur* différence. *Le premier signe est celui de l'*addition; *& le dernier, celui de la* soustraction.

Par exemple, si a *représente le nombre* 18, *&* b *le nombre* 12, *la premiere expression signifie,* 18 plus 12; *c'est-à-dire,* 30: *& la seconde,* 18 moins 12; *c'est-à-dire,* 6.

Mais, pour indiquer le produit *d'une certaine quantité représentée par une lettre quelconque* a, *& multipliée par une autre*

quantité représentée aussi par une autre lettre quelconque b; *on écrit de suite ces deux lettres. Ainsi, cette expression* a b, *indique le* produit *de la quantité représentée par* a, *& multipliée par la quantité représentée par* b.

Par exemple, si a *représente le nombre* 18, & b *le nombre* 12; *l'expression* a b *tient lieu de celle-ci*, 18 fois 12; *c'est-à-dire*, 216.

Enfin, pour indiquer le quotient *d'une certaine quantité représentée par une lettre quelconque* a, *& divisée par une autre quantité représentée aussi par une autre lettre quelconque* b; *on pose sur une petite ligne la lettre qui représente le dividende, & l'on met au dessous celle qui représente le diviseur. Ainsi, cette expression* $\frac{a}{b}$ *indique le* quotient *de la quantité représentée par* a, *& divisée par la quantité représentée par* b.

Par exemple, si a *représente le nombre* 18, & b *le nombre* 12, *l'expression* $\frac{a}{b}$ *tient lieu de cette fraction*, $\frac{18}{12}$; *c'est-à-dire, du* quotient *de* 18 *divisés par* 12, *lequel est* $1\frac{1}{2}$.

DES RAPPORTS.

DÉFINITIONS GÉNÉRALES.

315. ON nomme *Rapport*, ou *Raiſon*, ce qu'une quantité eſt à l'égard d'une autre.

Par exemple, le rapport *d'une ligne de* 12 *pieds à une de* 4 *pieds, eſt d'être* grande *à l'égard de cette ligne de* 4 *pieds : celui d'une ligne de* 12 *pieds à une de* 48 *pieds, eſt d'être* petite *à l'égard de cette ligne de* 48 *pieds : enfin, celui d'une ligne de* 12 *pieds à une autre ligne auſſi de* 12 *pieds, eſt d'être* égale *à cette derniere ligne.*

Mais, on ne juge cette ligne de 12 *pieds* grande *par rapport à celle de* 4 *pieds, que parce qu'on la conſidere, ou comme la* ſurpaſſant ; *ou comme la* contenant *plus d'une fois. On ne juge cette même ligne de* 12 *pieds* petite *par rapport à celle de* 48 *pieds, que parce qu'on la conſidere, ou comme en* différant ; *ou comme ne la* contenant *point une fois. Enfin, on ne juge cette ligne de* 12 *pieds* égale *à cette autre ligne auſſi de* 12 *pieds, que parce qu'on la conſidere, ou comme n'en* différant *point ; ou comme la* contenant *une fois préciſément.*

Ainſi, une quantité eſt grande, *ou* petite, *à l'égard d'une autre, ou* égale *à une autre, en deux maniéres. Par conſéquent, il y a deux ſortes de rapports.*

316. Lorſque l'on compare une quantité à une autre, en conſidérant la *maniere* † dont celle que l'on compare *differe* de celle à laquelle on la compare; le rapport qui eſt entre ces deux quantités, ſe nomme, *rapport arithmétique.*

Par exemple, ſi l'on conſidere qu'une ligne de 18 pieds eſt plus grande *qu'une ligne de 6 pieds, parce qu'elle la* ſurpaſſe *de 12 pieds; qu'une ligne de 25 pieds eſt* égale *à une autre ligne auſſi de 25 pieds, parce qu'elle n'en* differe *point; enfin, qu'une ligne de 9 pieds eſt* plus petite *qu'une ligne de 15 pieds, parce qu'elle en* differe *de 6 pieds; tous ces rapports ſont* arithmétiques.

317. Mais, lorſque l'on compare une quantité à une autre, en conſidérant la maniere dont celle que l'on compare *contient* celle à laquelle on la compare; le rapport qui eſt entre ces deux quantités ſe nomme

† Je dis la *maniere;* parce que la différence de 12 à 14, n'eſt point la même que celle de 12 à 10. La premiere eſt *poſitive;* l'autre eſt *négative;* & ſe nomme ordinairement, *excès.*

rapport géométrique, ou ſeulement, *rapport.*

Par exemple, ſi l'on conſidere qu'une ligne de 18 *pieds eſt* plus grande *qu'une ligne de* 6 *pieds, parce qu'elle la* contient 3 *fois; qu'une ligne de* 25 *pieds eſt* égale *à une autre ligne auſſi de* 25 *pieds, parce qu'elle la* contient *une fois préciſément; enfin, qu'une ligne de* 9 *pieds eſt* plus petite *qu'une ligne de* 15 *pieds, parce qu'elle n'en* contient *que les trois cinquiemes,* (*ou, ce qui eſt la même choſe, parce qu'elle n'en eſt que les trois cinquiemes*)*; tous ces rapports ſont* géométriques.

318. On nomme *terme antécédent*, la quantité que l'on compare; & *terme conſéquent*, celle à laquelle on la compare.

Par exemple, ſi l'on compare une ligne de 12 *pieds à une de* 8 *pieds, cette ligne de* 12 *pieds eſt l'*antécédent *du rapport qui eſt entre ces deux lignes: & celle de* 8 *pieds en eſt le* conſéquent.

319. On nomme *Expoſant*, ou *Dénominateur*, d'un rapport, le quotient de l'antécédent de ce rapport, diviſé par le conſéquent.

Par exemple, le quotient 4 *de* 12 *diviſé par* 3, *eſt l'*expoſant *du rapport d'une ligne de* 12 *pieds à une de* 3 *pieds; parce*

qu'il fait connoître que ce rapport eſt d'être quadruple *de cette ligne de* 3 *pieds.*

Pareillement, le quotient $\frac{2}{3}$ *de* 8 *diviſé par* 12, *eſt l'*expoſant *du rapport d'une ligne de* 8 *pieds à une de* 12 *pieds; parce qu'il fait connoître que ce rapport eſt d'être les* deux tiers *de cette ligne de* 12 *pieds.*

320. ON nomme rapport d'*égalité*, celui dont l'antécédent eſt égal au conſéquent.

Par exemple, le rapport d'une ligne de 12 *pieds à une autre ligne auſſi de* 12 *pieds, eſt un rapport d'*égalité.

On nomme au contraire, rapport d'*inégalité*, celui dont l'antécédent n'eſt point égal au conſéquent.

Par exemple, le rapport d'une ligne de 12 *pieds à une de* 8 *pieds, eſt un rapport d'*inégalité.

Pareillement, le rapport d'une ligne de 8 *pieds à une de* 12 *pieds, eſt auſſi un rapport d'*inégalité.

321. On dit qu'une quantité eſt *multiple* d'une autre, lorſqu'on la conſidere comme étant le produit de cette autre multipliée par un nombre quelconque, entier ou fractionnaire; mais, plus grand que l'unité.

Par exemple, 12 *ſont* multiples *de* 4;

parce qu'ils ſont le produit de 4 multipliés par 3.

Pareillement 17 *ſont* multiples *de* 5; *parce qu'ils ſont le produit de* 5 *multipliés par* $3\frac{2}{5}$.

On dit, au contraire, qu'une quantité eſt *ſous-multiple* d'une autre, lorſqu'on la conſidere comme étant le produit de cette autre multipliée par un nombre fractionnaire quelconque; mais, plus petit que l'unité.

Par exemple 8 *ſont* ſous-multiples *de* 12; *parce qu'ils ſont le produit de* 12 *multipliés par* $\frac{2}{3}$, *qui ne valent pas une unité.*

Enfin, on dit que des quantités ſont *équi-multiples*, ou *multiples pareilles* d'autres quantités; lorſqu'on les conſidere comme étant les produits de ces autres quantités multipliées chacune par un même nombre quelconque, entier ou fractionnaire, plus grand ou plus petit que l'unité.

Par exemple, 20 & 30 *ſont* équi-multiples *de* 4 & *de* 6; *parce qu'ils ſont les produits de ces deux nombres, multipliés chacun par le même nombre* 5.

Pareillement, 18 & 34 *ſont* équi-multiples *de* 27 & 51; *parce qu'ils ſont les produits de ces deux nombres, multipliés chacun par le même multiplicateur* $\frac{2}{3}$.

322. On nomme rapport *multiple*, ou

d'*inégalité majeure*, celui dont l'antécédent eſt plus grand que le conſéquent.

Par exemple, le rapport d'une ligne de 12 *pieds à une de* 8 *pieds, eſt un rapport* multiple.

323. On nomme rapport *ſous-multiple*, ou *d'inégalité mineure*, celui dont l'antécédent eſt plus petit que le conſéquent.

Par exemple, le rapport d'une ligne de 8 *pieds à une de* 12 *pieds, eſt un rapport* ſous-multiple.

324. ON dit que l'on *compoſe* † un rapport; lorſque l'on ajoute le conſéquent à l'antécédent, pour comparer la ſomme à ce même conſéquent.

Par exemple, du rapport de 18 *à* 6, *on forme par* compoſition, *celui de* 24 *à* 6.

325. On dit que l'on *diviſe* ¶ un rapport; lorſque l'on retranche le conſéquent de l'antécédent, pour comparer le reſte à ce même conſéquent.

Par exemple, du rapport de 18 *à* 6, *on forme par* diviſion, *celui de* 12 *à* 6.

326. On dit que l'on *convertit* § un rapport; lorſque l'on ajoute le conſéquent à

† Componendo. ¶ Dividendo. § Convertendo.

l'antécédent

l'antécédent, pour comparer la ſomme à ce même antécédent.

Par exemple, du rapport de 18 *à* 6, *on forme par* converſion, *celui de* 24 *à* 18.

327. On dit que l'on *renverſe* † un rapport; lorſque l'on prend le conſéquent de ce rapport, pour en faire l'antécédent d'un autre; & l'antécédent, pour en faire le conſéquent.

Par exemple, du rapport de 18 *à* 6, *on forme par* inverſion, *celui de* 6 *à* 18; *& ces deux rapports de* 18 *à* 6, *& de* 6 *à* 18, *ſe nomment reſpectivement, rapports* inverſes.

328. Enfin, on dit que l'on *échange* ¶ deux rapports; lorſque l'on prend l'antécédent du ſecond, pour en faire le conſéquent du premier; & le conſéquent du premier, pour en faire l'antécédent du ſecond.

Par exemple, des rapports de 18 *à* 6, *& de* 24 *à* 8, *on forme par* échange, *ceux de* 18 *à* 24, *& de* 6 *à* 8; *& ces deux derniers rapports ſont nommés* alternes, *à l'égard des deux premiers.*

† Invertendo.

¶ Permutando, *ou* Alternando.

329. ON dit qu'un rapport eſt *plus grand* qu'un autre, lorſque ſon
N. 319. expoſant (n) eſt plus grand que celui de cet autre rapport.

Par exemple, le rapport d'une ligne de 15 *pieds à une de* 5 *pieds, eſt* plus grand *que celui d'une ligne de* 18 *pieds à une de* 9 *pieds; parce que le quotient* 3 *de* 15 *diviſés par* 5, *eſt plus grand que le quotient* 2 *de* 18 *diviſés par* 9.

Pareillement, le rapport d'une ligne de 16 *pieds à une de* 20 *pieds, eſt* plus grand *que celui d'une ligne de* 8 *pieds à une de* 12 *pieds; parce que le quotient* $\frac{4}{5}$ *de* 16 *diviſés par* 20, *eſt plus grand* † *que le quotient* $\frac{2}{3}$ *de* 8 *diviſés par* 12.

330. ON dit que des rapports ſont *égaux*, ou ſont les *mêmes*; lorſque leurs Expoſans ſont égaux.

Par exemple, le rapport d'une ligne de 24 *pieds à une de* 8 *pieds, eſt* égal *à celui d'une ligne de* 18 *pieds à une de* 6 *pieds; parce que le quotient* 3 *de* 24 *diviſés par* 8, *eſt le même que celui de* 18 *diviſés par* 6.

Pareillement, le rapport d'une ligne de

† Pour connoître le quel de ces quotiens eſt le plus grand, lorſqu'ils ſont des nombres fractionnaires de différente dénomination; on les réduit à un même dénominateur.

10 *pieds à une de* 15 *pieds, est* le même *que celui d'une ligne de* 14 *pieds à une de* 21 *pieds, parce que le quotient* $\frac{2}{3}$ *de* 10 *divisés par* 15, *est égal à celui de* 14 *divisés par* 21.

SCHOLIE.

331. *Pour marquer que des rapports sont égaux, tels que le sont, par exemple, les rapports de* 24 *à* 8, *de* 18 *à* 6, *de* 21 *à* 7, *&c. on les sépare les uns des autres par quatre points rangés en quarré, de cette maniere :* 24 . 8 :: 18 . 6 :: 21 . 7 :: *&c.*

Et pour exprimer cette égalité, on se sert de différentes expressions, dont les plus ordinaires sont les suivantes.

Premiérement, 24 *sont à* 8, *ce que* 18 *sont à* 6, *ce que* 21 *sont à* 7, *&c.*

Secondement, 24 *contiennent* 8, *de la même maniere dont* 18 *contiennent* 6, *dont* 21 *contiennent* 7, *&c.*

Troisiémement, 24 *sont multiples de* 8, *de la même maniere dont* 18 *sont multiples de* 6, *dont* 21 *sont multiples de* 7, *&c.*

Quatriémement. Enfin, 24, 18 *&* 21, *sont équi-multiples de* 8, 6 *&* 7.

332. ON nomme *Proportion*, l'égalité de plusieurs rapports.

Par exemple, l'égalité qui est entre le rapport de 24 *à* 8, *& celui de* 18 *à* 6, *se nomme* proportion.

COROLLAIRE.

333. *Il suit de cette définition, qu'*une proportion ne peut point avoir moins de trois termes.

Démonst. *Puisque la proportion consiste dans l'égalité des rapports, il faut au moins deux rapports pour former une proportion. Or, on ne peut point former deux rapports égaux, avec moins de trois quantités; puisqu'après avoir formé un rapport en comparant une quantité à une autre, il faut nécessairement comparer l'une de ces deux quantités à une troisieme, pour former un second rapport qui soit égal au premier. Donc, il faut au moins trois quantités, pour former une proportion.*

Par conséquent, C. Q. F. D.

334. On nomme *proportion continue*, ou *Progression*, une proportion dont chaque conséquent sert d'antécédent au terme qui le suit immédiatement.

Par exemple, cette proportion, 3 . 9 : :

9 . 27 : : 27 . 81 : : 81 . *&c. s'appelle une* proportion continue, *ou une* progression.

SCHOLIE.

335. *Pour marquer que des quantités sont en* proportion continue, *telles que le sont, par exemple, celles-ci*, 3. 9. 27. 81. 243, *&c. on les fait précéder par une petite ligne entre quatre points, de cette maniere*, ∺ 3 . 9 . 27 . 81 . 243, *&c.*

Cette proportion est nommée continue; *parce que les rapports qui la forment sont liés les uns aux autres, par un terme commun. Les autres proportions sont appellées* discrettes; *parce que les rapports qui les forment sont séparés les uns des autres.*

336. Les quantités qui forment des rapports égaux, se nomment *quantités proportionnelles.*

Par exemple, 24, 8, 18 *&* 6, *sont des* quantités proportionnelles, *parce que* 24 . 8 : : 18 . 6.

337. Le premier & le dernier terme d'une proportion, se nomment les termes *extrêmes*; & les autres s'appellent les termes *moyens.*

Par exemple, 24 *&* 6 *sont les* extrêmes *de cette proportion*, 24 . 8 : : 18 . 6; *&* 8 *&* 18 *en sont les* moyens.

338. On dit que deux rapports sont

réciproques, lorſqu'ils ſont tels qu'en renverſant l'ordre des termes de l'un ou de l'autre, ils deviennent égaux.

Par exemple, le rapport de 8 *à* 24 *eſt* réciproque *à celui de* 18 *à* 6; *parce que ſi l'on renverſe l'ordre des termes du premier, on a cette proportion*, 24 . 8 : : 18 . 6 : *& ſi l'on renverſe au contraire l'ordre des termes du ſecond, on a cette autre proportion*, 8 . 24 : : 6 . 18.

339. Les quantités qui forment des rapports réciproques, ſe nomment quantités *réciproquement* proportionnelles.

Par exemple, 8, 24, 18 *&* 6, *ſont des quantités* réciproquement *proportionnelles, parce que* 24 . 8 : : 18 . 6.

340. Lorſque pluſieurs quantités d'une part, & autant d'une autre, ſont telles, que celles de la premiere part étant comparées chacune à celle qui la ſuit immédiatement, forment des rapports égaux chacun à chacun de ceux que forment celles de la ſeconde part, comparées auſſi chacune à celle qui la ſuit immédiatement; l'égalité de ces rapports ſe nomme *proportion d'égalité*.

Par exemple, $\begin{cases} 12. & 4. & 28. & 14. & \&c. \\ 18. & 6. & 42. & 21. & \&c. \end{cases}$

forment ce que l'on appelle une proportion

d'égalité; *parce que* 12 . 4 :: 18 . 6; 4 . 28 :: 6 . 42; 28 . 14 :: 42 . 21, *&c.*

341. Lorſque les rapports qui forment une proportion d'égalité, ſont rangés de maniere que le premier du premier rang eſt égal au premier du ſecond rang, le ſecond du premier rang au ſecond du ſecond rang, le troiſieme au troiſieme, & ainſi de ſuite; cette proportion ſe nomme proportion d'égalité *ordonnée*, ou *bien rangée.*

L'exemple précédent (n) *eſt une proportion d'égalité* ordonnée. N. 340.

342. Lorſque les rapports qui forment une proportion d'égalité, ſont rangés de maniere que le premier du premier rang eſt égal au dernier du ſecond rang, le ſecond du premier rang au pénultieme du ſecond rang, le troiſieme, à l'antépénultieme; & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que l'on vienne à comparer le dernier rapport du premier rang au premier du ſecond rang; cette proportion ſe nomme proportion d'égalité *troublée*, ou *mal rangée.*

Par exemple, { 20. 12. 4. 28. / 15. 105. 35. 21. } *forment une proportion d'égalité* troublée; *parce que* 20 . 12 :: 35 . 21; 12 . 4 :: 105 . 35; & 4 . 28 :: 15 . 105.

343. On dit qu'un rapport eſt *compoſé* d'autres rapports, lorſqu'on le conſidere comme étant formé de ces autres rapports multipliés les uns par les autres : *c'eſt-à-dire*, comme étant le rapport du produit des antécédens de ces autres rapports, au produit de leurs conſéquens.

Par exemple, ſi l'on conſidere que le rapport d'une ligne de 30 *pieds à une de* 5 *pieds, eſt d'être* ſextuple *de cette ligne de* 5 *pieds, ce rapport eſt* ſimple. *Mais, ſi l'on conſidere que cette ligne de* 30 *pieds n'eſt* ſextuple *de celle de* 5 *pieds, que parce qu'elle eſt le* double *du* triple *de cette ligne de* 5 *pieds ; alors, ce même rapport eſt* compoſé *d'un rapport double, & d'un rapport triple.*

Pareillement, ſi l'on conſidere que le rapport d'une ligne de 30 *pieds à une de* 72 *pieds, eſt d'être les* $\frac{5}{12}$ *de cette ligne de* 72 *pieds, ce rapport eſt* ſimple. *Mais, ſi l'on conſidere que cette ligne de* 30 *pieds n'eſt les* $\frac{5}{12}$ *de celle de* 72 *pieds, que parce qu'elle eſt les* $\frac{2}{3}$ *des* $\frac{3}{4}$ *des* $\frac{5}{6}$ *de cette ligne de* 72 *pieds ; alors ce même rapport eſt* compoſé *des rapports de* 2 *à* 3, *de* 3 *à* 4, *& de* 5 *à* 6.

COROLLAIRE.

344. *Il suit de cette définition, que si* l'on a plusieurs quantités entre lesquelles il puisse † y avoir rapport; celui de la premiere à la derniere, est composé des rapports de la premiere à la seconde, de la seconde à la troisieme, de la troisieme à la quatrieme; & ainsi de suite.

Si l'on a les quantités suivantes; par exemple, une ligne de 3 pieds, une de 8 pieds, une de 4 pieds, & une de 12 pieds; le rapport de cette ligne de 3 pieds à celle de 12 pieds, est composé du rapport de cette même ligne de 3 pieds à celle de 8 pieds, du rapport de cette ligne de 8 pieds à celle de 4 pieds, & du rapport de cette ligne de 4 pieds à celle de 12 pieds.

Démonst. *La ligne de 3 pieds est les* $\frac{3}{8}$ *de celle de 8 pieds; celle de 8 pieds est le double de celle de 4 pieds; & celle de 4 pieds est le tiers de celle de 12 pieds. Donc, cette ligne de 3 pieds est les* $\frac{3}{8}$ *du double du tiers de celle de 12 pieds. Par conséquent* (n), N. 343. *son rapport à cette ligne de 12 pieds est composé des rapports de 3 à 8, de 2 à 1, & de 1 à 3. Mais* [H], *ces rapports sont ceux de*

† Il faut que des quantités soient de même genre, afin qu'il puisse y avoir des rapports entr'elles. Il n'y a, par exemple, aucun rapport d'une aune à un louis d'or, d'une ligne à une surface, &c.

la premiere ligne à la ſeconde, de la ſeconde à la troiſieme, & de la troiſieme à la quatrieme.

Donc, C. Q. F. D.

345. On nomme rapports *compoſans*, ceux dont la multiplication a produit un rapport compoſé.

Par exemple, les rapports de 2 à 3, de 3 à 4, & de 5 à 6, ſont les rapports compoſans *du rapport d'une ligne de 30 pieds*
N. 343. *à une de 72 pieds* (n).

346. On dit qu'un rapport eſt *doublé* † d'un autre, lorſqu'on le conſidere comme étant compoſé de cet autre répété deux fois.

Par exemple, ſi l'on conſidere que le rapport d'une ligne de 36 pieds à une de 4 pieds, eſt d'être le triple *du* triple *de cette ligne de 4 pieds, ce rapport eſt* doublé *d'un rapport triple.*

Pareillement, ſi l'on conſidere que le rapport d'une ligne de 9 pieds à une de 16 pieds, eſt d'être les trois quarts *des* trois quarts *de cette ligne de 16 pieds, ce rapport eſt* doublé *de celui de 3 à 4.*

347. Enfin, on dit qu'un rapport eſt *triplé* d'un autre, lorſqu'on le conſidere

† Le vrai terme devroit être *redoublé*, de même que *retriplé*, dans la définition ſuivante, &c.

comme étant composé de cet autre répété trois fois : qu'il est *quadruplé* d'un autre, lorsque, &c. & ainsi de suite.

Par exemple, si l'on considere que le rapport d'une ligne de 56 *pieds à une de* 7 *pieds, est d'être le* double *du* double *du* double *de cette ligne de* 7 *pieds ; ce rapport est* triplé *d'un rapport double.*

Pareillement, si l'on considere que le rapport d'une ligne de 64 *pieds à une de* 125 *pieds, est d'être les* quatre cinquiemes *des* quatre cinquiemes *des* quatre cinquiemes *de cette ligne de* 125 *pieds, ce rapport est* triplé *de celui de* 4 *à* 5.

COROLLAIRE I.

348. *Il suit du corollaire précédent* (n), *& des deux dernieres définitions, que* dans une progression, le rapport du premier terme au troisieme, est doublé de celui du premier au second : le rapport du premier terme au quatrieme, est triplé de celui du premier au second : le rapport du premier terme au cinquieme, est quadruplé de celui du premier au second ; & ainsi de suite. N. 344

Dans cette progression ∺ a, b, c, d, e, f, g, *&c. le rapport de* a *à* c *est doublé de celui de* a *à* b : *le rapport de* a *à* d *est triplé de celui de* a *à* b : *le rapport de* a *à* e

est quadruplé de celui de a *à* b ; *& ainsi de suite.*

Démonst. *Si* a *est, par exemple, le tri-*
N. 332. *ple de* b, b *est le triple de* c (n) ; c *est le triple de* d ; *& ainsi de suite.*

Donc, premiérement, le rapport de a *à* c, *est d'être le triple du triple de* c. *Par conséquent, il est doublé de celui de* a *à* b
N. 346. (n).

Secondement. Le rapport de a *à* d *est d'être le triple du triple du triple de* d. *Par conséquent, il est triplé de celui de* a *à* b
N. 347. (n). *Et ainsi de suite.*

Pareillement, si a *est, par exemple, les* $\frac{2}{3}$ *de* b, b *est les* $\frac{2}{3}$ *de* c, c *est les* $\frac{2}{3}$ *de* d ; *& ainsi de suite.*

Donc, premiérement. Le rapport de a *à* c *est d'être les* $\frac{2}{3}$ *des* $\frac{2}{3}$ *de* c. *Par conséquent,*
N. 346. *il est doublé de celui de* a *à* b (n).

Secondement. Le rapport de a *à* d *est d'être les* $\frac{2}{3}$ *des* $\frac{2}{3}$ *des* $\frac{2}{3}$ *de* d. *Par consé-*
N. 347. *quent, il est triplé de celui de* a *à* b (n). *Et ainsi de suite.*

Or, la même démonstration subsiste, quel que soit l'exposant du rapport du premier terme a *au second terme* b.

Donc, C. Q. F. D.

Autre Démonst. *Premiérement. Le rapport de* a *à* c *est composé de celui de* a *à* b,
N. 341. *& de celui de* b *à* c (n). *Or, le rapport de*

b *à* c *eſt le même que celui de* a *à* b (n). N. 332.
Donc, le rapport de a *à* c *eſt compoſé de celui de* a *à* b *répété deux fois. Par conſéquent, il eſt doublé de ce dernier rapport* (n). N. 346.

Secondement, Le rapport de a *à* d *eſt compoſé de celui de* a *à* b, *de celui de* b *à* c, *& de celui de* c *à* d (n). *Or, le rapport de* N. 344.
b *à* c, *& celui de* c *à* d, *ſont chacun le même que celui de* a *à* b (n). *Donc, le* N. 332.
rapport de a *à* d *eſt compoſé de celui de* a *à* b *répété trois fois. Par conſéquent, il eſt triplé de ce dernier rapport* (n). N. 347.

Troiſiémement, enfin, on démontre par un raiſonnement pareil, que le rapport de a *à* e *eſt quadruplé de celui de* a *à* b: *que le rapport* a *à* f *eſt quintuplé de celui de* a *à* b. *Et ainſi de ſuite.*

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

349. *Il ſuit de ce corollaire, que* dans une progreſſion, le ſecond terme eſt le produit du premier multiplié par la premiere puiſſance † de l'expoſant du rap-

† On appelle *premiere puiſſance* d'un nombre quelconque, ce nombre même: *ſeconde puiſſance* d'un nombre, le produit de ce nombre multiplié par lui-même: *troiſieme puiſſance*, le produit de la ſeconde multipliée par la premiere: *quatrieme puiſſance*, le produit de la troiſieme multipliée par la premiere: & ainſi de ſuite.

Par exemple, 5 eſt la premiere puiſſance du nombre 5:

port du second terme au premier : le troisieme terme, est le produit du premier multiplié par la seconde puissance du même exposant : le quatrieme terme est le produit du premier multiplié par la troisieme puissance de ce même exposant ; & ainsi de suite.

Dans cette progression ∺ a. b. c. d. e. f. g. *&c.* b *est le produit de* a *multiplié par la premiere puissance de l'exposant du rapport de* b *à* a : c *est le produit de* a *multiplié par la seconde puissance du même exposant :* d *est le produit de* a *multiplié par la troisieme puissance de ce même exposant. Et ainsi de suite.*

Démonst. *Si l'exposant du rapport de* b *à* a *est, par exemple* 3, b *est le triple de* a ; *& par conséquent, le produit de* a *multiplié par* 3 : c *est le triple du triple de* a ; *& par conséquent, le produit de* a *multiplié par* 9 : d *est le triple du triple du triple de* a ; *& par conséquent, le produit de* a *multiplié par* 27 ; *& ainsi de suite. Or,* 3 *est la premiere puissance de l'exposant* 3 ; 9 *est sa seconde puissance ;* 27 *est sa troisieme puissance ; & ainsi de suite.*

Pareillement, si l'exposant du rapport de b *à* a *est, par exemple* $\frac{2}{3}$, b *est les* $\frac{2}{3}$ *de*

25, *la seconde puissance :* 125, *la troisieme :* 625, *la quatrieme ; & ainsi de suite.*

a ; *& par conſéquent, le produit de* a *multiplié par* $\frac{2}{3}$: c *eſt les* $\frac{2}{3}$ *des* $\frac{2}{3}$ *de* a ; *& par conſéquent, le produit de* a *multiplié par* $\frac{4}{9}$: d *eſt les* $\frac{2}{3}$ *des* $\frac{2}{3}$ *des* $\frac{2}{3}$ *de* a ; *& par conſéquent, le produit de* a *multiplé par* $\frac{8}{27}$; *& ainſi de ſuite. Or,* $\frac{2}{3}$ *eſt la premiere puiſſance de l'expoſant* $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$ *eſt ſa ſeconde puiſſance ;* $\frac{8}{27}$ *eſt ſa troiſieme puiſſance ; & ainſi de ſuite.*

Mais, la même démonſtration ſubſiſte, quel que ſoit l'expoſant du rapport du ſecond terme b *au premier terme* a.

Donc, C. Q. F. D.

AXIOMES.

350. Les rapports qui ſont égaux chacun à un même rapport, ſont égaux entre eux ¶.

351. Si de deux rapports égaux, l'un eſt plus grand qu'un troiſieme, l'autre l'eſt auſſi : & au contraire §.

352. Si l'on diviſe pluſieurs quantités par un même diviſeur, les quotiens † ſont

¶ Euclide, 11.

§ Euclide, 13.

† Par ce mot *quotient*, on entend, ce qui exprime la *maniere* dont une quantité en contient une autre. Ainſi, lorſque l'on dit, *le quotient de* a *diviſé par* c, *eſt le même que celui de* b *diviſé auſſi par* c ; on doit entendre la même choſe que ſi l'on diſoit, *la maniere dont* a *contient* c, *eſt la même que celle dont* b *contient* auſſi c.

entr'eux comme les quantités que l'on a divisées.

Par exemple, si a *est double de* b, *le quotient de* a *divisé par* d, *est double de celui de* b *divisé aussi par* d. *Si* a *est triple de* b, *le quotient de* a *divisé par* d, *est triple de celui de* b *divisé aussi par* d. *Et ainsi de suite.*

Au contraire, si a *est la moitié de* b, *le quotient de* a *divisé par* d, *est la moitié de celui de* b *divisé aussi par* d. *Si* a *est le tiers de* b, *le quotient de* a *divisé par* d, *est le tiers de celui de* b *divisé aussi par* d. *Et ainsi de suite.*

353. Si l'on divise une même quantité par plusieurs diviseurs, les quotiens sont
N. 327. entr'eux en rapports inverses (n) de ceux des diviseurs.

Par exemple, si a *est double de* b, *le quotient de* g *divisé par* a, *est la moitié de celui de* g *divisé par* b. *Si* a *est triple de* b, *le quotient de* g *divisé par* a, *est le tiers de celui de* g *divisé par* b. *Et ainsi de suite.*

Au contraire, si a *est la moitié de* b, *le quotient de* g *divisé par* a, *est double de celui de* g *divisé par* b. *Si* a *est le tiers de* b, *le quotient de* g *divisé par* a, *est triple de celui de* g *divisé par* b. *Et ainsi de suite.*



DES PROPORTIONS GÉOMÉTRIQUES.

PROPOSITION I.

THÉORÊME.

354. *Si deux quantités ſont égales, elles ont chacune le même rapport à une troiſieme quantité: & une troiſieme quantité a le même rapport à chacune d'elles* †.

PREMIÉREMENT. Si *a* eſt égal à *b*, le rapport de *a* à *c* eſt le même que celui de *b* à *c*.

Démonſt. Puiſque *a* eſt égal à *b* [H], le quotient de *a* diviſé par *c*, eſt le même que celui de *b* diviſé auſſi par *c* (n). Donc, N. 352.
le rapport de *a* à *c* eſt auſſi le même que celui de *b* à *c* (n). N. 330.

SECONDEMENT. Si *a* eſt égal à *b*, le rapport de *c* à *a* eſt auſſi le même que celui de *c* à *b*.

Démonſt. Puiſque *a* eſt égal à *b* [H], le quotient de *c* diviſé par *a* eſt le même

† Euclide, 7.

N. 353. que celui de *c* divisé par *b* (n). Donc, le rapport de *c* à *a*, est aussi le même que
N. 330. celui de *c* à *b* (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION II.

THÉORÊME.

355. *Si deux quantités sont inégales, la plus grande a un plus grand rapport que la plus petite à une troisieme quantité; & une troisieme quantité a un plus grand rapport à la plus petite qu'à la plus grande* †.

PREMIÉREMENT. Si *a* est plus grand que *b*, le rapport de *a* à *c* est plus grand que celui de *b* à *c*.

Démonst. Puisque *a* est plus grand que *b* [H], le quotient de *a* divisé par *c*, est plus grand que celui de *b* divisé aussi par
N. 352. *c* (n). Donc, le rapport de *a* à *c* est aussi
N. 329. plus grand que celui de *b* à *c* (n).

SECONDEMENT. Si *a* est plus grand que *b*, le rapport de *c* à *b* est plus grand que celui de *c* à *a*.

Démonst. Puisque *a* est plus grand que

† Euclide, 8.

b [H], le quotient de *c* divisé par *b*, est plus grand que celui de *c* divisé par *a* (n). N. 353.
Donc, le rapport de *c* à *b* est aussi plus grand que celui de *c* à *a* (n). N. 329.
Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION III.

THÉORÊME.

356. *Si deux quantités ont chacune le même rapport à une troisieme quantité, elles sont égales : & si une troisieme quantité a le même rapport à chacune d'elles, elles le sont aussi* †.

PREMIÉREMENT. Si le rapport de *a* à *c* est le même que celui de *b* à *c*, *a* est égal à *b*.

Démonst. Puisque le rapport de *a* à *c*, est le même que celui de *b* à *c* [H], le quotient de *a* divisé par *c*, est le même que celui de *b* divisé aussi par *c* (n). Donc, N. 330.
a est égal à *b* (n). N. 352.

SECONDEMENT. Si le rapport de *c* à *a* est le même que celui de *c* à *b*, *a* est encore égal à *b*.

† Euclide, 9.

Démonst. Puisque le rapport de *c* à *a* est le même que celui de *c* à *b* [H], le quotient de *c* divisé par *a*, est le même
N. 330. que celui de *c* divisé par *b* (n). Donc, *a*
N. 353. est égal à *b* (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION IV.

THÉORÊME.

357. *Si de deux quantités, l'une a un plus grand rapport que l'autre à une troisieme quantité; celle qui a le plus grand rapport, est la plus grande. Et si une troisieme quantité a un plus grand rapport à l'une de ces deux quantités qu'à l'autre; celle à laquelle elle a le plus grand rapport, est la plus petite* †.

PREMIÉREMENT. Si le rapport de *a* à *c* est plus grand que celui de *b* à *c*, *a* est plus grand que *b*.

Démonst. Puisque le rapport de *a* à *c* est plus grand que celui de *b* à *c* [H], le quotient de *a* divisé par *c*, est plus grand
N. 329. que celui de *b* divisé aussi par *c* (n). Donc,
N. 352. *a* est plus grand que *b* (n).

† Euclide, 10.

SECONDEMENT. Si le rapport de *c* à *b* eſt plus grand que celui de *c* à *a*, alors *b* eſt plus petit que *a*.

Démonſt. Puiſque le rapport de *c* à *b* eſt plus grand que celui de *c* à *a* [H], le quotient de *c* diviſé par *b*, eſt plus grand que celui de *c* diviſé par *a* (n). Donc, *b* N. 329.
eſt plus petit que *a* (n). N. 353.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

SCHOLIE.

358. *Ces quatre premieres propoſitions ne ſont que des axiomes, que l'on auroit pu énoncer de la maniere ſuivante.*

Si *a* & *b* ſont égaux, ils ſont également grands à l'égard de *c*; & *c* eſt auſſi grand à l'égard de *a*, qu'à l'égard de *b*.

Si *a* eſt plus grand que *b*, il eſt plus grand à l'égard de *c*, que *b* ne l'eſt à l'égard auſſi de *c*: & *c* eſt plus grand à l'égard de *b*, qu'à l'égard de *a*.

Si *a* & *b* ſont également grands à l'égard de *c*, ils ſont égaux: & ſi *c* eſt auſſi grand à l'égard de *a*, qu'à l'égard de *b*; *a* & *b* ſont encore égaux.

Enfin, ſi *a* eſt plus grand à l'égard de *c*, que *b* ne l'eſt à l'égard auſſi de *c*; *a* eſt plus grand que *b*: & ſi *c* eſt plus grand à l'égard de *b*, qu'à l'égard de *a*, *b* eſt plus petit que *a*.

PROPOSITION V.

THÉORÊME.

359. *Les quantités qui ſont équimultiples d'autres quantités, ont entr'elles le même rapport que ces dernieres* †.

SI l'on multiplie *a* & *b* chacun par un même nombre quelconque, le rapport des produits eſt le même que celui de *a* à *b*.

Le nombre par lequel on multiplie a *&* b, *eſt ou entier, ou fractionnaire.*

PREMIER CAS.

Lorſque le nombre par lequel on multiplie a *&* b, *eſt un nombre entier.*

Il faut démontrer, par exemple, que $7a \,.\, 7b :: a \,.\, b$.

Démonſt. Le quotient de *a* diviſé par *b*, eſt la ſeptieme partie de celui de $7a$
N. 352. diviſés auſſi par *b* (n); puiſque *a* eſt la ſeptieme partie de $7a$.

Mais, le quotient de $7a$ diviſés par $7b$,

† Cette Propoſition, qui eſt la quinzieme d'Euclide, eſt quelquefois énoncée de la maniere ſuivante:

On ne change point un rapport, en multipliant, ou en diviſant, par un même nombre, chacun de ſes termes.

eſt auſſi la ſeptieme partie de celui de $7a$ diviſés par b (n) ; puiſque $7b$ ſont ſeptuples de b. Donc, les quotiens de a diviſé par b, & de $7a$ diviſés par $7b$, ſont égaux (n). Par conſéquent, $7a . 7b :: a . b$ (n).

N. 353. N. 68. N. 330.

SECOND CAS.

Lorſque le nombre par lequel on multiplie a & b, *eſt un nombre fractionnaire.*

Il faut démontrer, par exemple, que $\frac{3a}{5} . \frac{3b}{5} :: a . b$.

Démonſt. Si l'on multiplie $\frac{3a}{5}$ & $\frac{3b}{5}$ chacun par leur dénominateur 5, on a, $3a . 3b :: \frac{3a}{5} . \frac{3b}{5}$ [D]; puiſque $3a$ & $3b$ ſont équimultiples de $\frac{3a}{5}$ & $\frac{3b}{5}$. Mais $3a . 3b :: a . b$ [D]; puiſque $3a$ & $3b$ ſont équimultiples de a & b. Donc, $\frac{3a}{5} . \frac{3b}{5} :: a . b$ (n).

N. 350.

Or, dans l'un comme dans l'autre cas, la démonſtration reſte pareille, quel que ſoit le nombre par lequel on multiplie a & b.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

360. Il suit de ce théorême, que *le produit de deux quantités quelconques, est moyen proportionnel entre les quarrés de ces deux mêmes quantités.*

Le produit de a multiplié par b, est moyen proportionnel entre le quarré de a & celui de b.

Démonst. Si l'on multiplie a & b, chacun par a, on a $aa \,.\, ab :: a \,.\, b$. (n): & si l'on multiplie les mêmes a & b chacun aussi par b, on a $ab \,.\, bb :: a \,.\, b$ (n). Donc, les rapports de aa à ab, & de ab à bb, sont égaux chacun au même rapport de a à b. Par conséquent, $aa. \, ab :: ab. \, bb$ (n).

N. 359 N. 359. N. 350.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

361. Il suit aussi de ce même théorême, que *si quatre quantités sont proportionnelles; le quarré d'une antécédente est au produit de cette antécédente multipliée par sa conséquente, ce que le quarré de l'autre antécédente, est au produit de cette autre antécédente multipliée aussi par sa conséquente.*

Si $a \,.\, b :: c \,.\, d$, le quarré aa de a est au

au produit ab de a multiplié par b, ce que le quarré cc de c est au produit cd de c multiplié par d.

Démonst. Si l'on multiplie a & b chacun par a, on a $aa . ab :: a . b$ (n) : & N. 359.
si l'on multiplie aussi c & d chacun par c, on a $cc . cd :: c . d$ (n). Or, les rapports de N. 359.
a à b, & de c à d, sont égaux [H]. Donc, ceux de aa à ab, & de cc à cd, le sont aussi (n). N. 350.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION VI.

THÉORÊME.

362. *Si quatre quantités sont proportionnelles, le produit des extrêmes est égal à celui des moyennes.*

SI $a . b :: c . d$, le produit de a multiplié par d, est égal à celui de b multiplié par c.

Démonst. Si l'on multiplie a & b chacun par d, on a $ad . bd :: a . b$ (n) : & si N. 359.
l'on multiplie aussi c & d chacun par b, on a $bc . bd :: c . d$ (n). Or, les rapports de N. 3
a à b, & de c à d, sont égaux [H]. Donc, ceux de ad à bd, & de bc à bd, le sont aussi (n) ; & par conséquent, ad est égal à N. 350.
bc (n). N. 356.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

363. Il ſuit de ce théorême, que *ſi trois quantités ſont en progreſſion, le produit des extrêmes eſt égal au quarré de la moyenne.*

PROPOSITION VII.

PROBLÊME.

364. *Trouver le quatrieme terme d'une proportion, dont les trois premiers termes ſont donnés* †.

IL faut trouver le quatrieme terme d'une proportion, dont les trois premiers termes ſont 28, 32 & 49.

Solution. Multipliez l'un par l'autre, les moyens 32 & 49. Diviſez par le premier terme 28, le produit 1568. Le quotient 56, ſera le terme demandé.

Démonſt. Puiſque dans une proportion, le produit des extrêmes eſt égal à celui des
N. 362. moyens (n), 28 fois le terme demandé doit produire autant que 32 fois 49. Or, 32 fois 49 produiſent 1568. Donc, 28

† On donne ordinairement à ce problême, les noms de *regle de Proportion, regle de Trois, regle d'Or, &c.*

fois le terme demandé produit aussi 1568. Par conséquent, ce terme est le quotient 56 de 1568 divisés par 28.

Donc, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

365. Il suit de la solution de ce problême, que *pour trouver le troisieme terme d'une progression dont les deux premiers termes sont donnés; il faut multiplier le second terme par lui-même, & diviser ensuite le produit, par le premier terme.*

PROPOSITION VIII.

THÉORÊME.

366. *Si quatre quantités sont telles, que le produit des extrêmes soit égal à celui des moyennes; elles sont proportionnelles.*

Si les quantités a, b, c & d sont telles que le produit de a multiplié par d, soit égal à celui de b multiplié par c; le rapport de a à b est le même que celui de c à d.

Démonst. Si l'on compare chaque produit ad & bc, à celui des conséquentes b

& *d*; on a, *ad* . *bd* : : *a* . *b* : & *bc* . *bd* : :
N. 359. *c* . *d* (n). Or, les rapports de *ad* à *bd*, &
N. 354. de *bc* à *bd*, ſont égaux (n); puiſque les produits *ad* & *bc* le ſont [H]. Donc, les rapports de *a* à *b*, & de *c* à *d*, ſont auſſi
N. 350. égaux (n).

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

367. Il ſuit de ce théorême, que *ſi trois quantités ſont telles, que le produit des extrêmes ſoit égal au quarré de la moyenne, elles ſont en progreſſion.*

COROLLAIRE II.

368. Il ſuit de ce corollaire, que *pour trouver un moyen proportionnel entre deux nombres donnés, il faut multiplier ces deux nombres l'un par l'autre, & la racine quarrée du produit ſera le moyen demandé.*



PROPOSITION IX.

THÉORÊME.

369. *Si le premier terme d'une proportion est plus petit, aussi grand, ou plus grand que le troisieme; le second est aussi plus petit, aussi grand, ou plus grand que le quatrieme* †.

DANS cette proportion, *a* . *b* :: *c* . *d*, le premier terme *a* est, ou plus petit que *c* ou égal à *c*; ou plus grand que *c*.

PREMIÉREMENT. Si *a* est plus petit que *c*, *b* est aussi plus petit que *d*.

Démonst. Le quotient de *c* divisé par *d*, est égal à celui de *a* divisé par *b* [H]. Mais, le quotient de *a* divisé par *b*, est plus petit que celui de *c* divisé aussi par *b* (n); puisque *a* est plus petit que *c* [H]. N. 352.
Donc, le quotient de *c* divisé par *d*, est aussi plus petit que celui de *c* divisé par *b* (n). Par conséquent, *b* est plus petit N. 351.
que *d* (n). N. 353.

SECONDEMENT. Si *a* est égal à *c*, *b* est aussi égal à *d*.

† Euclide, 14.

Démonst. Le quotient de *c* divisé par *d*, est égal à celui de *a* divisé par *b* [H]. Mais, le quotient de *a* divisé par *b*, est
N. 352. égal à celui de *c* divisé aussi par *b* (n); puisque *a* est égal à *c* [H]. Donc, le quotient de *c* divisé par *d*, est égal à celui de
N. 350. *c* divisé par *b* (n). Par conséquent, *b* est
N. 353. égal à *d* (n).

TROISIÉMEMENT. Enfin, si *a* est plus grand que *c*, *b* est aussi plus grand que *d*.

Démonst. Le quotient de *c* divisé par *d*, est égal à celui de *a* divisé par *b* [H]. Mais le quotient de *a* divisé par *b*, est plus grand
N. 352. que celui de *c* divisé aussi par *b* (n); puisque *a* est plus grand que *c* [H]. Donc, le quotient de *c* divisé par *d*, est aussi plus
N. 351. grand que celui de *c* divisé par *b* (n). Par
N. 353. conséquent, *b* est plus grand que *d* (n).

Donc, C. Q. F. D.

USAGE.

370. *On se sert de cette proposition, pour examiner si les termes d'une proportion sont rangés dans l'ordre qu'ils doivent l'être; & par conséquent, pour connoître si une regle de Trois est* directe *ou* inverse.

Si l'on propose, par exemple, cette question.

Pour tapisser un certain appartement, il

faut 217 aunes d'une étoffe qui a $\frac{2}{3}$ de largeur, combien d'aunes faudra-t-il d'une autre étoffe qui a $\frac{3}{4}$ de largeur ?

SOLUTION. Le nombre des aunes demandé, eſt le quatrieme terme d'une proportion dont les trois premiers termes ſont donnés. Ainſi, l'on commence par les poſer de la maniere ſuivante.

Si $\frac{2}{3}$ aunes de largeur exigent 217 aunes de longueur, combien en exigent $\frac{3}{4}$ aunes de largeur ?

On examine enſuite ſi, relativement aux conditions de la queſtion, les termes ſont rangés dans l'ordre qu'ils doivent l'être. Or, on voit qu'ils ne le ſont pas. Car, il faudra moins d'une étoffe qui a $\frac{3}{4}$ de largeur, qu'il n'en faut de celle qui n'en a que $\frac{2}{3}$: & ſuivant l'ordre dans lequel ces termes ſont poſés, on trouveroit le contraire ; puiſque $\frac{2}{3}$ étant plus petits que $\frac{3}{4}$, le ſecond terme 217 ſeroit auſſi plus petit que le terme demandé (n). N. 369.

Les termes $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$ ſont donc ici poſés dans un ordre inverſe. Il faut donc tranſporter $\frac{3}{4}$ du troiſieme rang au premier ; & $\frac{2}{3}$, du premier rang au troiſieme : & comme par cette inverſion la proportion deviendra directe, on trouvera (n) 192 $\frac{8}{9}$ *pour ſon quatrieme terme,* N. 364. *qui eſt le nombre des aunes demandé.*

On feroit les mêmes opérations, & l'on trouveroit la même réponse, en raisonnant de la maniere suivante.

217 *aunes de longeur sur* $\frac{2}{3}$ *de largeur produisent une surface de* 144 $\frac{2}{3}$ *aunes quar-*
N. 149. *rées* (n). *Ainsi, il s'agit de trouver le nombre qui étant multiplié par* $\frac{3}{4}$, *produira la même surface. Or, pour le connoître, on divise* 144 $\frac{2}{3}$ *par* $\frac{3}{4}$; *& le quotient* 192 $\frac{8}{9}$ *est ce nombre.*

Donc, *C. Q. F. F.*

PROPOSITION X.

THÉORÊME.

371. *Si quatre quantités de même genre* ¶ *sont proportionnelles, elles le sont aussi étant échangées* †.

SI le rapport de *a* à *b* est égal à celui de *c* à *d*; le rapport de *a* à *c* est aussi égal à celui de *b* à *d*.

Démonst. Puisque $a . b :: c . d$ [H], *a* contient *b* de la même maniere dont *c* con-
N. 330. tient *d* (n). Donc, *a* & *c* sont équimulti-

† Euclide, 16.

¶ On ne peut faire d'échange, que lorsque tous les termes d'une proportion sont de même genre. Puisque, si *a* étant, par exemple, une ligne, *c* étoit une surface, il n'y auroit aucun rapport de *a* à *c*.

ples de b & d. Par conféquent, $a . c :: b . d$ (n). N. 359.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

372. Il fuit de ce théorême, que *fi quatre quantités font proportionnelles, elles le font auffi étant renverfées.*

Si le rapport de a à b eft égal à celui de c à d; le rapport de b à a eft auffi égal à celui de d à c.

Démonft. $a . b :: c . d$ [H]. Ainfi, en échangeant (n), $a . c :: b . d$; & par con- N. 371.
quent, $b . d :: a . c$. Donc, en échangeant encore, $b . a :: d . c$.

Par conféquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

373. Il fuit auffi de ce même théorême, que *fi quatre quantités font proportionnelles; le quarré d'une antécédente eft à celui de fa conféquente, comme le produit des antécédentes eft à celui des conféquentes.*

Si $a . b :: c . d$, le quarré de a eft à celui de b, comme le produit de a multiplié par c, eft à celui de b multiplié par d.

Démonft. $a . b :: c . d$. [H]. Donc, en échangeant, $a . c :: b . d$ (n). Mais, N. 371.

N. 361. *aa . ac* : : *bb . bd* (n). Donc, en échangeant encore, *aa . bb* : : *ac . bd*.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XI.

THÉORÊME.

374. *Si quatre quantités ſont proportionnelles, elles le ſont auſſi étant diviſées* †.

SI le rapport de *a* à *b* eſt égal à celui de *c* à *d*; le rapport de *a—b* à *b*, eſt auſſi égal à celui de *c—d* à *d*.

Démonſt. Le quotient de *a—b* diviſé par *b*, eſt plus petit d'une unité que celui de *a* diviſé par *b* : & le quotient de *c—d* diviſé par *d*, eſt auſſi plus petit d'une unité que celui de *c* diviſé par *d*. Mais, les quotiens de *a* diviſé par *b*, & de *c* diviſé par *d*, ſont égaux [H]. Donc, ceux de *a—b* diviſé par *b*, & de *c—d* diviſé par *d*,
N. 64. le ſont auſſi (n). Par conſéquent, *a—b* .
N. 330. *b* : : *c—d* . *d* (n).

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

375. Il ſuit de ce théorême, que l'*on*

† Euclide, 17.

ne change point un rapport, en retranchant de chacun de ses termes; pourvu que ce que l'on retranche du premier terme soit à ce que l'on retranche du second, comme ce premier terme est au second †.

Si le rapport de a à b est égal celui de c à d, la différence des antécédentes a & c, est à celle des conséquentes b & d, ce que a est à b.

Démonst. $a . b :: c . d$. [H]. Donc, en échangeant $a . c :: b . d$ (n). Mais, en di- N. 371.
visant, $a-c . c :: b-d . d$ (n). Donc, en N. 374.
échangeant encore, $a-c . b-d :: c . d$; & par conséquent, ce que a est à b.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

376. Il suit de ce corrollaire, que *si deux quantités qui sont divisées chacune en deux parties, sont telles, que ces deux quantités, & leurs premieres parties soient proportionnelles; ces deux mêmes quantités, & leurs secondes parties le sont aussi* †.

Si le rapport de $a+b$ à $c+d$ est égal à celui de a à c; il l'est aussi à celui de b à d.

Démonst. Puisque $a+b . c+d :: a . c$ [H];

† Euclide, 5.

ſi l'on retranche a de $a+b$, & c de $c+d$, les reſtes b & d ſont entr'eux ce que $a+b$
N. 375. eſt à $c+d$ (n).

Par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XII.

THÉORÊME.

377. *Si quatre quantités ſont proportionnelles; elles le ſont auſſi étant compoſées* †.

Si le rapport de a à b eſt égal à celui de c à d; le rapport de $a+b$ à b, eſt auſſi égal à celui de $c+d$ à d.

Démonſt. Le quotient de $a+b$ diviſé par b, eſt plus grand d'une unité que celui de a diviſé par b: & le quotient de $c+d$ diviſé par d, eſt auſſi plus grand d'une unité que celui de c diviſé par d. Mais, les quotiens de a diviſé par b, & de c diviſé par d, ſont égaux [H]. Donc, ceux de $a+b$ diviſé par b, & de $c+d$ diviſé
N. 64. par d, le ſont auſſi (n). Par conſéquent,
N. 330. $a+b . b :: c+d . d$ (n).

Donc, C. Q. F. D.

† Euclide, 18.

COROLLAIRE I.

378. Il ſuit de ce théorême, que *ſi quatre quantités ſont proportionnelles ; elles le ſont auſſi étant converties.*

Si le rapport de a à b eſt égal à celui de c à d ; la rapport de $a+b$ à a, eſt auſſi égal à celui de $c+d$ à c.

Démonſt. $a . b :: c . d$ [H]. Donc, en renverſant, $b . a :: d . c$ (n). Par conſé- N. 372.
quent, en compoſant, $a+b . a :: c+d . c$ (n). N. 377.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

379. Il ſuit auſſi de ce même théorême, que l'*on ne change point un rapport, en ajoutant à chacun de ſes termes ; pourvu que ce que l'on ajoute au premier terme ſoit à ce que l'on ajoute au ſecond, comme ce premier terme eſt au ſecond* †.

Si le rapport de a à b eſt égal à celui de c à d ; la ſomme des antécédentes a & c, eſt à celle des conſéquentes b & d, ce que a eſt à b.

Démonſt. $a . b :: c . d$ [H]. Donc, en échangeant, $a . c :: b . d$ (n). Mais, en N. 371.
compoſant, $a+c . c :: b+d . d$ (n). Donc, N. 377.

† Euclide, 1 & 12.

en échangeant encore, $a+c \,.\, b+d :: c \,.\, d$; & par conséquent, ce que a est à b.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

380. Il suit de ce second corrollaire, que *dans une progression; un conséquent quelconque moins son antécédent, est à cet antécédent, ce que le dernier terme moins le premier, est à la somme de tous les termes qui précedent le dernier.*

De cette progression, ÷ $a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \,.\, f \,.\, g$; on conclut cette proportion, $b-a \,.\, a :: g-a \,.\, a+b+c+d+e+f$.

Démonst. Puisque [H], a, b, c, d, e,
f & g, sont en progression; $a \,.\, b :: b \,.\, c ::$
N. 334. $c \,.\, d :: d \,.\, e :: e \,.\, f :: f \,.\, g$ (n). Donc, a est
à b, comme la somme des antécédens a,
b, c, d, e & f, est à celle des consé-
N. 379. quens b, c, d, e, f & g (n). Par con-
N. 372. séquent, en renversant (n), $b \,.\, a :: b+c$
$+d+e+f+g \,.\, a+b+c+d+e+f$.
N. 374. Mais, en divisant (n), $b-a \,.\, a :: b+c+$
$d+e+f+g-a-b-c-d-e-f \,.\, a+b+$
$c+d+e+f$. Donc, puisque le troisieme
terme $b+c+$ &c. ne vaut que $g-a$, cette
derniere proportion se réduit à celle-ci,
$b-a \,.\, a :: g-a \,.\, a+b+c+d+e+f$.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE IV.

381. Enfin, il ſuit de ce dernier corollaire, que *dans une progreſſion, ſi le ſecond terme eſt double du premier ; le dernier moins le premier, eſt égal à la ſomme de tous les termes qui précedent le dernier : ſi le ſecond terme eſt triple du premier ; le dernier moins le premier, eſt double de cette ſomme : ſi le ſecond terme eſt quadruple du premier ; le dernier moins le premier, eſt triple de cette même ſomme ; & ainſi de ſuite.*

Dans cette progreſſion, ∺ $a \,.\, b \,.\, c$. &c. (dont nous repréſentons le dernier terme par z ; & par s la ſomme de tous les termes qui précédent z), ſi b eſt double de a, $z-a$ eſt égal à s : ſi b eſt triple de a, $z-a$ eſt double de s : ſi b eſt quadruple de a, $z-a$ eſt triple de s : & ainſi de ſuite.

Démonſt. $b-a \,.\, a :: z-a \,.\, s$, (n). N. 380.

Donc, *Premiérement.* Si b eſt double de a, $b-a$ eſt égal à a. Par conſéquent, $z-a$ l'eſt auſſi à s.

Secondement. Si b eſt triple de a, $b-a$ eſt double de a. Par conſéquent, $z-a$ l'eſt auſſi de s.

Troiſiémement. Si b eſt quadruple de a,

$b-a$ eſt triple de a. Par conſéquent, $z-a$ l'eſt auſſi de s. Et ainſi de ſuite.

Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION XIII.

PROBLÊME.

382. *Diviſer une quantité donnée, proportionnellement aux parties auſſi données d'une autre quantité* †.

IL faut diviſer 225, en parties qui ſoient proportionnelles aux parties 36, 48 & 66, de 150.

N. 364. *Solution.* Cherchez (n) les quatriemes termes 54, 72 & 99 de ces trois proportions, 150. 225 :: 36. * :: 48. * :: 66. * ; ils ſeront les parties demandées.

Démonſt. Suivant ce qui eſt propoſé, il faut que 36 ſoit à la premiere partie demandée, ce que 48 eſt à la ſeconde, ce que 66 eſt à la troiſieme. Ainſi, les trois parties données ſont les antécédens d'une proportion, dont les trois parties demandées ſont les conſéquens.

Or, dans une proportion, la ſomme

† On donne ordinairement à ce problême, le nom de *regle de Compagnie.*

des antécédens eſt à celle des conſéquens, ce qu'un antécédent quelconque eſt à ſon conſéquent (n). N. 379.

Donc, la ſomme 150 des trois parties données, eſt à la ſomme 225 des trois parties demandées ; ce que la premiere partie donnée 36, eſt à la premiere partie demandée ; ce que la ſeconde partie donnée 48, eſt à la ſeconde partie demandée ; ce que, &c.

Par conſéquent, pour trouver ces trois parties demandées, il faut faire (n) les trois N. 364.
regles de proportion, qui ſont ordonnées par la ſolution.

Donc, C. Q. F. F.

PROPOSITION XIV.

THÉORÊME.

383. *Si l'on multiplie, ou ſi l'on diviſe, par ordre les termes de deux proportions ; les produits, ou les quotiens, ſont proportionnels* †.

SI l'on multiplie les termes de cette proportion, $a . b :: c . d$, par ceux de cette autre proportion $e . f :: g . h$, chacun par

† On énonce quelquefois ainſi ce théorême : *Les rapports qui ſont compoſés de rapports égaux, ſont auſſi égaux.*

chacun, les produits ae, bf, cg & dh, ſont proportionnels.

Démonſt. $a . b .:: c . d$[H]. Ainſi, en
N. 371. échangeant, $a . c :: b . d$ (n). Donc, ſi l'on multiplie les deux premiers termes chacun par e, & les deux derniers chacun
N. 359. par f, on a $ae . ce :: bf . df$ (n). Par conſéquent, en échangeant encore, $ae.$
N. 371. $bf :: ce . df$ (n).

Pareillement, $e . f :: g . h$, [H]. Ainſi,
N. 371. en échangeant, $e . g :: f . h$ (n). Donc, ſi l'on multiplie auſſi les deux premiers termes chacun par c, & les deux derniers, chacun par d; on a, $ce . cg :: df . dh$
N. 359. (n). Par conſéquent, en échangeant encore, $ce . df :: cg . dh$.

Ainſi, les rapports de ae à bf, & de cg à dh, ſont égaux chacun au même rapport de ce à df. Donc, $ae . bf :: cg .$
N. 350. dh (n).

Et ſi l'on diviſe les termes de cette proportion, $a . b :: c . d$, par ceux de cette autre proportion, $e . f :: g . h$, chacun par chacun; les quotiens $\frac{a}{e}$, $\frac{b}{f}$, $\frac{c}{g}$ & $\frac{d}{h}$ ſont auſſi proportionnels.

Démonſt. Si l'on multiplie $\frac{a}{e}$ & $\frac{b}{f}$ chacun par le même produit ef, on a,
N. 359. $\frac{a}{e} . \frac{b}{f} :: af . be$ (n).

Et si l'on multiplie aussi $\frac{c}{g}$ & $\frac{d}{h}$ chacun par le même produit gh, on a, $\frac{c}{g} . \frac{d}{h}$ :: $ch . dg$ (n). N. 359.

Mais, les rapports de af à be, & de ch à dg, sont égaux [D]; puisqu'ils sont les produits des termes de ces deux proportions $a . b :: c . d$, & $f . e :: h . g$, multipliés par ordre. Donc, les rapports de $\frac{a}{e}$ à $\frac{b}{f}$, & de $\frac{c}{g}$ à $\frac{d}{h}$, sont aussi égaux (n). N. 350.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

384. Il suit de la premiere partie de ce théorême, que *les puissances pareilles des termes d'une proportion, sont proportionnelles* : & de la seconde partie, que *les racines pareilles des termes d'une proportion, sont aussi proportionnelles.*



PROPOSITION XV.

THÉORÊME.

385. *Les quarrés sont entr'eux en rapport doublé de celui de leurs racines ; les cubes, en rapport triplé : les quatriemes puissances, en rapport quadruplé : & ainsi de suite.*

LE rapport du quarré de *a* au quarré de *b*, est doublé du rapport de *a* à *b* : celui du cube de *a* au cube de *b*, en est triplé : celui de la quatrieme puissance de *a* à la quatrieme puissance de *b*, en est quadruplé : & ainsi de suite.

Démonst. Si *a* étant, par exemple, les $\frac{5}{6}$ de *b*, on multiplioit *a* & *b*, chacun par *b* ; le produit *ab* seroit aussi les $\frac{5}{6}$ du pro-
N. 359. duit *bb* (n).

Mais, au lieu de multiplier *a* par *b*, on le multiplie par *a*, qui est les $\frac{5}{6}$ de *b* [H]. Donc, le produit *aa* est les $\frac{5}{6}$ des $\frac{5}{6}$ du produit *bb*.

Or, puisque *aa* est les $\frac{5}{6}$ des $\frac{5}{6}$ de *bb*, le rapport de *aa* à *bb* est celui de 5 à 6, répété deux fois. Donc, il est doublé de
N. 346. ce dernier rapport (n) ; & par consé-

quent, de celui de *a* à *b*, qui eſt le même [H].

Pareillement, ſi l'on multiplioit *aa* & *bb*, chacun par *b*, le produit *aab* ſeroit encore les $\frac{5}{6}$ des $\frac{5}{6}$ du produit *bbb* (n). N. 359.

Mais, au lieu de multiplier *aa* par *b*, on le multiplie par *a*, qui eſt les $\frac{5}{6}$ de *b*, [H]. Donc, le produit *aaa* eſt les $\frac{5}{6}$ des $\frac{5}{6}$ des $\frac{5}{6}$ du produit *bbb*.

Or, puiſque *aaa* eſt les $\frac{5}{6}$ des $\frac{5}{6}$ des $\frac{5}{6}$ de *bbb*, le rapport de *aaa* à *bbb* eſt celui de 5 à 6 répété trois fois. Donc, il eſt triplé de ce dernier rapport (n); & par conſéquent, N. 347. de celui de *a* à *b*, qui eſt le même [H]. Et ainſi de ſuite.

Or, la démonſtration reſte pareille, quel que ſoit l'expoſant du rapport de *a* à *b*.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

386. Il ſuit de ce théorême, que *dans une progreſſion, le quarré du premier terme eſt au quarré du ſecond, ce que le premier terme eſt au troiſieme : le cube du premier terme eſt au cube du ſecond, ce que le premier terme eſt au quatrieme : la quatrieme puiſſance du premier terme eſt à la quatrieme puiſſance du ſecond, ce que le premier terme eſt au cinquieme : & ainſi de ſuite.*

Dans cette progression ∺ *a* . *b* . *c* . *d* . *e*. *f*. &c. le quarré de *a* eſt à celui de *b*, ce que *a* eſt à *c* : le cube de *a* eſt au cube de *b*, ce que *a* eſt à *d* : la quatrieme puiſſance de *a* eſt à la quatrieme puiſſance de *b*, ce que *a* eſt à *e* ; & ainſi de ſuite.

Démonſt. Le rapport du quarré de *a* au quarré de *b*, & le rapport de *a* à *c*, ſont doublés, l'un & l'autre, du même rap-
N. 385. & 348. port de *a* à *b* (n). Donc, ils ſont égaux.

Pareillement. Le rapport du cube de *a* au cube de *b*, & le rapport de *a* à *d*, ſont triplés, l'un & l'autre, du même rapport
N. 385. & 348. de *a* à *b* (n). Donc, ils ſont auſſi égaux. Et ainſi de ſuite.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

387. Il ſuit de ce corollaire : Premiérement, que *pour trouver un moyen proportionnel entre deux nombres quelconques*
N. 364. a *&* b, *il faut chercher* (n) *le quatrieme terme de cette proportion*, a . b : : aa . * ; *& extraire enſuite la racine quarrée de ce quatrieme terme.*

Secondement, que *pour trouver le premier de deux moyens proportionnels entre deux nombres quelconques* a *&* b, *il faut*
N. 364. *chercher* (n) *le quatrieme terme de cette pro-*

portion, a . b :: aaa . *; *& extraire ensuite la racine cube de ce quatrieme terme.*

Troisiémement, que *pour trouver le premier de trois moyens proportionnels entre deux nombres quelconques* a *&* b, *il faut chercher* (n) *le quatrieme terme de cette pro-* N. 364.
portion a . b :: aaaa . *; *& extraire ensuite la racine quatrieme de ce quatrieme terme.*

Et ainsi de suite.

PROPOSITION XVI.

THÉORÊME.

388. *Dans une proportion d'égalité ordonnée ; le premier & le dernier terme du premier rang ; & le premier & le dernier terme du second rang, sont proportionnels* †.

SI les quantités *a*, *b* & *c*, *d*, *e* & *f*, forment une proportion d'égalité ordonnée ; le rapport de *a* à *c* est le même que celui de *d* à *f*.

Démonst. *a* . *b* :: *d* . *e* ; & *b* . *c* . :: *e* . *f*
(n). Donc, en échangeant, *a* . *d* :: *b* . *e*, N. 341.
& *b* . *e* :: *c* . *f* (n). N. 371.

† Euclide, 22.

Ainſi, les rapports de *a* à *d*, & de *c* à *f*, ſont égaux chacun au même rapport
N. 350. de *b* à *e*. Donc, *a* . *d* : : *c* . *f* (n); & par conſéquent, en échangeant, *a* . *c* : : *d* . *f*.
Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION XVII.

THÉORÊME.

389. *Dans une proportion d'égalité troublée; le premier & le dernier terme du premier rang, & le premier & le dernier terme du ſecond rang, ſont proportionnels* †.

Si les quantités *a*, *b* & *c*, *d*, *e* & *f*, forment une proportion d'égalité troublée; le rapport de *a* à *c* eſt le même que celui de *d* à *f*.

N. 342. *Démonſt.* *a* . *b* : : *e* . *f*; & *b* . *c* : : *d* . *e* (n). Donc, ſi l'on multiplie par ordre les termes de ces deux proportions, on a,
N. 383. *ab* . *bc* : : *ed* . *ef* (n). Ainſi, ſi l'on diviſe les deux premiers termes chacun par *b*, & les deux derniers chacun par *e*; on a, *a* . *c*
N. 359. : : *d* . *f* (n).

Par conſéquent, C. Q. F. D.

† Euclide, 23.

PROPOSITION

PROPOSITION XVIII.

THÉORÊME.

390. *Si six quantités sont telles, que les quatre premieres soient proportionnelles; & que la cinquieme, la seconde, la sixieme, & la quatrieme, le soient aussi: la somme de la premiere & de la cinquieme est à la seconde, ce que la somme de la troisieme & de la sixieme est à la quatrieme* †.

SI les six quantités a, b, c, d, e & f, sont telles que, $a . b :: c . d$; & que $e . b :: f . d$; le rapport de $a + e$ à b, est le même que celui de $c + f$ à d.

Démonst. [H] $a . b :: c . d$; & $e . b :: f . d$. Donc, en échangeant, $a . c :: b . d$. & $e, f :: b . d$ (n). Par consé- N. 371.
quent, $a . c :: e . f$ (n). N. 350.

Mais, en échangeant encore, $a . e :: c . f$. Donc, en composant, $a + e . e :: c + f . f$ (n). Par conséquent, en échan- N. 377.
geant pour la troisieme fois, $a + e . c + f :: e . f$.

Or, $e . f :: b . d$ [D]. Donc, $a + e . c +$

† Euclide, 24.

N. 350. $f :: b . d$ (n). Par conséquent, en échangeant pour la quatrieme fois, $a+e . b :: c+f . d$.
Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION XIX.

Théorême.

391. *Si quatre quantités sont proportionnelles ; la somme de la plus grande & de la plus petite, est plus grande que celle des deux autres* †.

Si les quatre quantités a, b, c, & d, dont a est la plus grande & d la plus petite, sont proportionnelles ; la somme $a+d$, de a & de d, est plus grande que la somme $b+c$ de b & de c.

Démonst. [H] $a . b :: c . d$. Donc,
N. 375. $a-c . c :: b-d . d$ (n). Par conséquent, puisque c est plus grand que d [H], $a-c$
N. 369. est aussi plus grand que $b-d$ (n). Or, puisque $a-c$ est plus grand que $b-d$, si l'on ajoute à chacun la même quantité $c+d$, la premiere somme $a-c+c+d$, sera aussi plus grande que la seconde $b-d+c+d$
N. 65. (n). Mais, $-c+c$ se détruisent, de même

† Euclide, 25.

que $-d+d$. Donc, la premiere ſomme $a+d$ eſt plus grande que la ſeconde $b+c$. Par conſéquent, C. Q. F. D.

USAGES

Des Progreſſions géométriques.

QUESTION Iere.

392. *On ſuppoſe qu'un pere de famille a eu deux enfans ; que chacun de ces deux enfans en a eu deux autres ; & ainſi de ſuite : & l'on demande de combien de perſonnes a dû être ſa quinzieme génération.*

SOLUTION. Le nombre des perſonnes demandé eſt le quinzieme terme d'une progreſſion, dont le premier terme eſt 2, & dont l'expoſant du rapport du ſecond terme au premier, eſt auſſi 2. Or (n), dans une progreſſion, le quinzieme N. 349.
terme eſt le produit du premier, multiplié par la quatorzieme puiſſance de l'expoſant du rapport du ſecond terme au premier. Donc, ſi on éleve l'expoſant 2 à ſa quatorzieme puiſſance, que l'on trouvera de 16384 ; & ſi l'on multiplie le premier terme (lequel eſt auſſi 2), par cette quatorzieme puiſſance, le produit 32768 ſera le nombre demandé.

Autre Question.

393. *Un tuteur doit à son pupille* 12000 *l. de capital, avec les intérêts des intérêts au denier* 20, *pendant* 8 *années. On demande combien il doit payer à la fin de cette huitieme année.*

SOLUTION. Ce capital, avec les intérêts des intérêts, pendant 8 années, est le huitieme terme d'une progression, dont le premier est 12000; & dont l'exposant du rapport du second au pre-
N. 349. mier, est $\frac{21}{20}$. Ainsi (n), si l'on multiplie 12000 par la septieme puissance de $\frac{21}{20}$, le produit 16885 liv. 4 s. 1 den. *p. p.* sera la dette demandée.

QUESTION II.

394. *Un particulier a* 20 *diamans. Il propose de les vendre, à condition qu'on lui paiera* 6 *den. du premier,* 18 *du second,* 54 *du troisieme; & ainsi de suite. On demande le prix de ces* 20 *diamans.*

SOLUTION. Le prix demandé est la somme de tous les termes d'une progression qui en a 20, dont le premier est 6; & dont l'exposant du rapport du second
N. 381. au premier, est 3. Or (n), dans une progression de 20 termes, dont l'expo-

ſant du rapport du ſecond terme au premier eſt 3 ; la ſomme des 19 premiers termes eſt la moitié de la différence du premier terme au vingtieme. Ainſi, l'on commencera par chercher le vingtieme terme (n), que l'on trouvera de 6973568802. N. 349.
De ce vingtieme terme, on retranchera le premier (lequel eſt 6), & il reſtera 6973568796. On prendra la moitié de ce reſte, afin d'avoir la ſomme 3486784398 des 19 premiers termes. Enfin, à cette ſomme on ajoutera le vingtieme terme; & la ſomme 10460353200 deniers, ou ou 43584805 livres, ſera le prix demandé.

QUESTION III.

395. *Un particulier a mis 70 louis d'or ſur un vaiſſeau, pour commercer dans les Pays étrangers. Au bout d'un an, ce vaiſſeau a rapporté les 70 louis, avec un certain profit. On a remis le tout ſur un autre vaiſſeau, qui au bout d'un an, a rapporté le même profit que le premier, à proportion. Ayant ainſi continué à faire la même choſe chaque année, le vaiſſeau qui eſt revenu à la fin de la dixieme, a rapporté 35840 louis, tant pour capital que pour gain. On demande en quelle proportion ce capital a augmenté chaque année.*

SOLUTION. Il s'agit de trouver l'exposant du rapport qui regne dans une progression de 10 termes, dont le premier
N. 349. est 70, & le dernier 35840. Or (n), dans une progression, le dixieme terme est le produit du premier multiplié par la neuvieme puissance de l'exposant du rapport du second au premier. Donc, si l'on divise 35840 par 70, le quotient 512 sera cette neuvieme puissance. Par conséquent, si l'on extrait la racine neuvieme de ce quotient, le nombre 2 que l'on trouvera pour cette racine, sera cet exposant. Ainsi, la seconde mise a été double de la premiere; la troisieme, double de la seconde; & ainsi de suite.

QUESTION IV.

396. *Un particulier a de très-beaux chevaux. Il consent de les vendre tous à la même personne, si elle veut lui payer 4 deniers du premier, 12 du second, 36 du troisieme, & ainsi de suite; de maniere que le dernier reviendroit à 708588 deniers. On demande combien ce particulier a de chevaux à vendre.*

SOLUTION. Il s'agit de trouver le nombre des termes d'une progression, dont on connoît le premier terme 4, le dernier 708588, & l'exposant 3 du

rapport du second au premier. Or (n), N. 349.
puisque 708588 est le dernier terme d'une progression, il est le produit du premier terme 4, multiplié par une certaine puissance de l'exposant 3, plus petite d'une unité que le nombre des termes que l'on cherche. Ainsi, si on le divise par 4, le quotient 177147 sera cette certaine puissance ; & par conséquent, pour connoître ce nombre des termes, il faut chercher le degré de cette puissance. Or, pour le trouver, on élevera l'exposant 3 de puissance en puissance, jusqu'à ce que l'on parvienne à former ce même nombre 177147. Et comme ce ne sera qu'en l'élevant à la onzieme puissance que l'on y parviendra, on en conclura que la progression dont il s'agit a 12 termes ; & que par conséquent, le nombre des chevaux demandé est 12.

QUESTION V.

397. *Un particulier a* 10 *tableaux. Le dernier lui revient à* 137781 *livres ; le pénultieme ne lui coûte que le tiers du dernier ; l'antépénultieme, le tiers du pénultieme ; & ainsi de suite. On demande combien il a acheté le premier.*

SOLUTION. Il s'agit de trouver le premier terme d'une progression, qui en

a 10, & dont on connoît le dernier 137781, avec l'expoſant 3 du rapport
N. 349. du ſecond au premier. Or (n), ce dernier terme eſt le produit du premier, multiplié par la neuvieme puiſſance de cet expoſant. Donc, ſi l'on éleve 3 à ſa neuvieme puiſſance, (que l'on trouvera de 19683), & ſi l'on diviſe enſuite 137781 par cette neuvieme puiſſance, le quotient 7 ſera le premier terme; & par conſéquent, le prix demandé du premier tableau.

QUESTION VI.

398. *Une perſonne a dépenſé 9450 livres en ſix ans, de maniere que la dépenſe de la ſeconde année a été double de celle de la premiere; la dépenſe de la troiſieme année, double de celle de la ſeconde; & ainſi de ſuite. On demande combien cette perſonne a dépenſé chaque année.*

SOLUTION. Il s'agit de trouver tous les termes d'une progreſſion, qui en a 6, dont la ſomme de tous ces termes eſt 9450, & dont l'expoſant du rapport du
N. 332. ſecond au premier eſt 2. Or (n), ces termes ſont proportionnels à ceux de telle autre proportion que l'on veuille prendre, pourvu qu'elle ſoit ſemblable à celle dont il s'agit; c'eſt-à-dire, pourvu qu'elle ait

le même expoſant. Donc, ſi l'on prend cette progreſſion, par exemple, ∺ 1. 2. 4. 8. 16. 32; la ſomme 63 de tous ſes termes ſera à ſon premier terme, ce que la ſomme 9450 de la progreſſion demandée, eſt auſſi à ſon premier terme. Par conſéquent, ſi l'on cherche (n) le quatrieme N. 364.
terme 150 de cette proportion, 63 . 1 :: 9450 . * , ce quatrieme terme ſera le premier de la progreſſion demandée. Or, lorſque l'on connoîtra ce premier terme, on trouvera facilement les cinq autres; & par conſéquent, ce que la perſonne propoſée a dépenſé chaque année.

QUESTION VII.

399. *Un particulier dit que ſi l'on vouloit lui acheter ſon cheval, à condition de lui payer 3 deniers du premier clou de ſes fers, 6 du ſecond, 12 du troiſieme, & ainſi de ſuite; il le vendroit* 13107 *l.* 3 *ſols* 9 *den. On demande combien ce cheval a de clous à ſes fers.*

SOLUTION. Il s'agit de trouver le nombre des termes d'une progreſſion, dont on connoît le premier terme 3; la ſomme de tous les termes, 3145725 deniers; & l'expoſant 2 du rapport du ſecond terme au premier.

Or (n), dans une progreſſion dont le N. 381.

ſecond terme eſt double du premier ; le dernier terme moins le premier, eſt égal à la ſomme de tous ceux qui le précedent. Donc, la ſomme 3145725 de tous les termes de la progreſſion dont il eſt ici queſtion, eſt compoſée du dernier terme, plus du même dernier terme moins le premier. Par conſéquent, ſi l'on ajoute à cette ſomme le premier terme, lequel eſt 3, on aura une ſomme 3145728, qui ſera le double de ce dernier terme. Mais, puiſque 3145728 eſt le double du dernier terme, ſa moitié 1572864 eſt ce dernier terme.

Ainſi, il ne s'agit plus que de trouver le nombre des termes d'une progreſſion, dont on connoît le premier terme 3, le dernier 1572864, avec l'expoſant 2 du rapport du ſecond au premier ; ce qui fait une queſtion toute ſemblable à la quatrieme.





LES ÉLÉMENS D'EUCLIDE.

LIVRE SIXIEME.

APRÈS avoir enseigné la doctrine des rapports en général, dans le Livre précédent, il s'agit d'appliquer dans celui-ci cette doctrine, aux lignes droites, aux surfaces planes & aux angles. Ainsi, Euclide le commence par démontrer ce que les parallélogrammes qui ont des hauteurs égales, sont les uns à l'égard des autres; & du rapport que ces figures ont entr'elles, il conclut celui qui se trouve entre les triangles, lorsqu'ils sont dans le même cas. Il examine ensuite les conditions que les triangles doivent avoir, pour être semblables; & donne la maniere de se servir de ceux qui le sont, non-seulement pour résoudre tous les problêmes

qui concernent les lignes proportionnelles ; mais auſſi pour tracer une figure qui ſoit ſemblable à telle figure rectiligne que l'on veuille propoſer. Il conſidere enſuite les figures réciproques, & en déduit une des propriétés les plus conſidérables des lignes proportionnelles. Enfin, il compare entr'elles les figures ſemblables, pour en déterminer les rapports ; & après avoir rendu générale la quarante-ſeptieme proproſition du premier Livre, il termine celui-ci par enſeigner les rapports que les Secteurs ont entr'eux.

On en a auſſi ſupprimé quelques propoſitions inutiles. Mais on leur en a ſubſtitué d'autres qui rendent la théorie du cercle beaucoup plus complette. On a marqué d'un aſtériſque celles qui ne ſont point d'Euclide ; & de deux, celles qui ſont de l'Auteur.



DÉFINITIONS.

400. On nomme figures *ſemblables*, celles dont les angles ſont égaux, chacun à chacun; & dont les côtés qui forment ces angles égaux, ſont proportionnels.

Les figures ABC * *& DEF ſont* ſemblables, *ſi l'angle A étant égal à l'angle D, l'angle B à l'angle E, & l'angle C à l'angle F; AB eſt à DE, ce que AC eſt à DF, ce que BC eſt à EF.* Fig. 1.

401. On nomme côtés *homologues*, ou côtés *pareils*, ceux qui dans les figures ſemblables, ſont oppoſés aux angles égaux.

Le côté AB * *eſt* homologue *au côté DE; le côté AC, au côté DF; & le côté BC, au côté EF.* Fig. 1.

402. On dit de deux figures, qu'elles ſont *réciproques*, lorſque les dimenſions de l'une ſont les extrêmes d'une proportion, dont les dimenſions de l'autre ſont les moyens.

Les figures AC * *& EG ſont* réciproques, *ſi AB . EF :: EH . AD.* Fig. 2.

403. On dit d'une ligne droite, qu'elle

est divisée en *moyenne & extrême raison*, lorsqu'étant divisée en deux parties, toute cette ligne est à la plus grande de ces deux parties, ce que cette plus grande partie est à la plus petite.

Fig. 3. *La ligne AB* * *est divisée en* moyenne & extrême raison *au point C, si AB. AC : : AC . CB.*

On donne ce nom à une ligne ainsi divisée ; parce que les extrêmes & le moyen de la proportion sont dans cette même ligne.

404. On appelle *hauteur* d'une figure, la perpendiculaire abaissée du sommet de cette figure à sa base, prolongée s'il est nécessaire.

Fig. 4. *La perpendiculaire FE* * *est la* hauteur *de la figure AC.*

PROPOSITION I.

THÉORÊME.

405. *Les parallélogrammes, qui ont des hauteurs égales, sont entr'eux comme leurs bases.*

Fig. 5. SI les hauteurs des parallélogrammes AC* & EG sont égales, le premier est au second, ce que AB est à EF.

Conſt. Diviſez (n) la plus petite AB N. 94.
des deux baſes AB & EF, en tel nombre de parties égales qu'il vous plaira ; par exemple, en quatre parties égales AI, IL, &c. Prenez ſur la baſe EF, une partie EP égale à la partie AI. Enfin (n), N. 133.
tirez par chaque point de diviſion I, L, &c. les paralleles IK, LM, &c. au côté AD ; & par le point P, la parallele PQ au côté EH.

Démonſt. Les parallélogrammes AK, IM, LO, NC & EQ ſont égaux (n) ; N. 153.
puiſqu'ils ont des baſes égales [C], & des hauteurs égales [H]. Ainſi, le parallélogramme AC eſt 4 fois le parallélogramme EQ ; de même que la baſe AB eſt 4 fois la partie EP. Par conſéquent, AC . EQ : : AB . EP (n). N. 359.

Or, la partie EP eſt contenue un certain nombre de fois dans la baſe EF, ou exactement, ou avec un reſte.

Si elle y eſt contenue exactement un certain nombre de fois ; par exemple, 6 fois.

Diviſez cette baſe EF en 6 parties égales EP, PR, &c. & par chaque point de diviſion P, R, &c. tirez (n) les paralleles N. 133.
PQ, RS, &c. au côté EH.

Ces paralleles diviſent le parallélogramme EG en ſix parallélogrammes EQ, PS, &c, qui ſont égaux (n). Ainſi, N. 153.

la base EF est 6 fois la partie EP ; de même que le parallélogramme EG est 6 fois le parallélogramme EQ. Par conséquent,
N. 359. EQ . EG : : EP . EF (n).

Mais, si elle y est contenue un certain nombre de fois, avec un reste ; par exemple 6 fois, avec un reste qui en soit, par exemple, les $\frac{2}{3}$.

Divisez cette même base EF en 20 parties égales†; & par chaque point de division
N. 133. tirez (n) des paralleles au côté EH.

Ces paralleles diviseront le parallélogramme EG en 20 parallélogrammes, qui
N. 153. seront égaux (n). Or, la partie EP contiendra alors 3 des 20 parties égales de la base EF ; de même que le parallélogramme EQ contiendra 3 de ces 20 parallélogrammes égaux. Par conséquent, on aura encore, de même que dans le cas précédent,
N. 359. EQ . EG : : EP . EF (n).

Ainsi [D], on a ces deux proportions, AC . EQ : : AB . EP ; & EQ . EG : : EP . EF ; or, ces deux proportions en font une
N. 341. d'égalité ordonnée (n). Donc, AC . EG : :
N. 388. AB . EF (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.

† On divise ici en 20 parties égales ; parce que 6 entiers & $\frac{2}{3}$ font $\frac{20}{3}$.

COROLLAIRE I.

406. Il ſuit de ce théorême, que *les triangles qui ont des hauteurs égales, ſont entr'eux comme leurs baſes.*

Les triangles ABC * & DEF dont les hauteurs ſont égales, ſont entr'eux ce que AC eſt à DF. Fig. 6.

Conſt. Des points A & B, F & E, tirez (n) les paralleles AG & BG, FH & EH aux côtés CB & CA, DE & DF, chacune à chacun. N. 133.

Démonſt. Les parallélogrammes CG & DH ſont entr'eux, ce que AC eſt à DF (n); puiſqu'ils ont des hauteurs égales [H]. Or, les triangles ABC & DEF ſont les moitiés de ces parallélogrammes (n). Donc, ils ſont auſſi entr'eux, ce que AC eſt à DF (n). N. 405. N. 159. N 359.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

407. Il ſuit de ce corollaire, que *la ſurface d'un polygone régulier quelconque, eſt égale à celle d'un triangle dont la hauteur eſt égale à une perpendiculaire tirée du centre de ce polygone à l'un de ſes côtés; & la baſe, à la circonférence de ce même polygone.*

La ſurface d'un polygone régulier quelconque, par exemple celle du pentagone
Fig. 7 régulier ACE *, eſt égale à celle du triangle FGH, dont la hauteur GL eſt égale à la perpendiculaire IK ; & la baſe FH, à la circonférence ABCDEA.

Conſt. Tirez du centre I à chaque angle A, B, C, &c. les lignes droites IA, IB, IC, &c.

Démonſt. La ſurface du polygone ACE eſt quintuple de celle du triangle EID ; puiſque les triangles EID, DIC, CIB,
N. 88. BIA & AIE, ſont égaux (n). Mais, la ſurface du triangle FGH eſt auſſi quintuple
N. 406. de celle du même triangle EID (n) ; puiſque les hauteurs GL & IK ſont égales [H], de même que la baſe FH & la circonférence ABCDE. Donc, la ſurface du polygone
N. 67. ACE eſt égale à celle du triangle FGH (n).

Or, la même démonſtration ſubſiſte, quel que ſoit le nombre des côtés d'un polygone régulier.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

408. Il ſuit de ce ſecond corollaire ; que *la ſurface d'un cercle, eſt égale à celle d'un triangle dont la hauteur eſt égale au rayon de ce cercle ; & la baſe, à la circonférence de ce même cercle.*

Démonst. Plus un polygone régulier a de côtés, moins il differe du cercle dans lequel il est inscrit. Et quelque grand que l'on imagine le nombre de ces côtés, on peut encore concevoir un autre polygone qui en ait un plus grand nombre, & qui differe par conséquent encore moins de ce cercle, sans que l'imagination puisse jamais épuiser, ni la multitude de ces côtés, ni cette approximation au cercle.

Or, si sans déterminer la multitude des côtés d'un polygone régulier, on en imagine un qui en ait un si grand nombre, que sa différence au cercle dans lequel il seroit inscrit, devienne absolument insensible; ce polygone se confondroit avec ce cercle, de maniere que l'on pourroit, même en rigueur, prendre indifféremment le polygone pour le cercle, & le cercle pour le polygone.

Mais (n), la surface de ce polygone, quel qu'il fût, seroit égale à celle d'un triangle dont la hauteur seroit égale à une perpendiculaire abaissée du centre de ce polygone à l'un de ses côtés; & la base, à la circonférence de ce même polygone. N. 407.

Donc, puisque cette surface, cette perpendiculaire, & cette circonférence, pourroient être prises pour la surface, le rayon, & la circonférence du cercle dans

lequel ce même polygone feroit infcrit; on peut en conclure que la furface de ce cercle eft auffi égale à celle d'un triangle, dont la hauteur feroit égale au rayon de ce cercle; & la bafe, à la circonférence de ce même cercle.

Par conféquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE IV.

409. Il fuit de ce dernier corollaire, & du nº 160, que *la furface d'un cercle, eft égale au produit de la circonférence de ce cercle multipliée par la moitié de fon rayon; ou, ce qui revient au même, au produit de fa demi-circonférence multipliée par fon rayon.*

On verra au nº 444, *la maniere de mefurer la circonférence d'un cercle.*

SCHOLIE.

410. *Si nous difons, dans le corollaire précédent, que* le cercle & le polygone infcrit feront confondus enfemble, de maniere que l'on pourra prendre indifféremment l'un pour l'autre; *nous ne prétendons point faire entendre par-là, que ce cercle foit lui-même ce polygone; puifque, quoi que l'on en dife, cela ne peut jamais être.*

En effet, si les cercles étoient, comme on le dit ordinairement, des polygones d'une infinité de côtés; un cercle ne seroit plus grand qu'un autre, que parce qu'il seroit, ou un polygone d'un plus grand nombre de côtés, ou un polygone dont les côtés seroient plus grands.

Or, premiérement, si un cercle est plus grand qu'un autre, ce n'est point parce qu'il est un polygone d'un plus grand nombre de côtés; puisque, si cela étoit, les cercles ne seroient point des figures semblables.

Secondement, si un cercle est plus grand qu'un autre, ce n'est point non plus parce qu'il est un polygone dont les côtés sont plus grands; puisque, si cela étoit, un cercle ne seroit, par exemple, 10000 fois plus grand qu'un autre, que parce que ce cercle & cet autre seroient deux polygones, dont chaque côté du grand seroit centuple de chaque côté du petit. Or, ce côté centuple auroit un milieu: & ce milieu, par exemple K, ne se confondroit point avec les extré-* Fig. 7.
mités E & D; puisqu'il en seroit réellement éloigné de part & d'autre, de 50 parties, égales chacune au côté du petit polygone. Ainsi (n), *la ligne droite IE, qui seroit* N. 113.
tirée du centre I à l'extrémité E, seroit rigoureusement plus grande que la perpendi-

culaire IK, abaiſſée du même centre I au milieu K du côté ED. Par conſéquent, toutes les lignes droites qui ſeroient tirées du centre à la circonférence, ne ſeroient point rigoureuſement égales.

Et ſi l'on objecte que ce polygone ayant une infinité † de côtés, ces 50 parties égales ſont abſolument inſenſibles; nous prendrons un polygone dix millions de fois plus grand, cent millions de fois plus grand; ſi grand enfin, que l'on ſera forcé d'avouer que toutes les lignes droites qui ſeront tirées de ſon centre à ſa circonférence, ne ſeront plus rigoureuſement égales ¶. Or, une figure, dans laquelle toutes les lignes droites, que l'on peut tirer du centre à la circonférence, ne ſont point rigoureuſement égales, n'eſt point un cercle.

Donc, il n'y a point de milieu. Ou les

† Que le nom d'*infini* ne faſſe point illuſion. Ce n'eſt qu'un terme que les Géometres emploient aſſez ordinairement pour réſoudre de certaines queſtions; comme les Philoſophes ſe ſervent de celui d'*inſtinct*, pour exprimer la nature de l'ame des bêtes.

¶ Il ne faut pas dire que l'excès du rayon IE ſur le rayon IK, étant inſenſible dans un petit cercle, il le ſera de même dans un grand; parce que ſon accroiſſement ſera toujours proportionnel à celui des rayons. Il eſt vrai que cet accroiſſement ſera proportionnel: mais, il eſt vrai auſſi, en Géométrie comme en Phyſique, que ce qui eſt inſenſible dans le petit, devient très-conſidérable dans le grand. La millieme partie d'un pouce eſt abſolument inſenſible: la millieme partie d'une lieue eſt de 13 pieds 8 pouces, & plus.

cercles ne ſont point des figures ſemblables ; ou il y a des cercles dont les rayons ne ſont point rigoureuſement égaux ; ou enfin, les cercles ne ſont point des polygones.

Mais, premiérement, c'eſt une des vérités les plus inconteſtables de la Géométrie, que les cercles ſont des figures ſemblables : ſecondement, par la définition du cercle (n), *on ne peut admettre pour cercle, qu'une figure plane dans laquelle toutes les lignes droites tirées du centre à la circonférence, ſont rigoureuſement égales. Donc, les cercles ne ſont point des polygones.* N. 28.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION II.

THÉORÊME.

411. *Une ligne droite qui eſt parallele à l'un des côtés d'un triangle, coupe les deux autres côtés proportionnellement : & ſi elle coupe deux côtés proportionnellement, elle eſt parallele au troiſieme.*

PREMIÉREMENT. Dans le triangle ABC *, la parallele DE au côté AC, donne cette proportion, BD . DA : : BE . EC. Fig. 8.

Conſt. Tirez du point A au point E, la ligne droite AE ; & du point D au point C, la ligne droite DC.

Démonſt. Les triangles BED & DEA ont chacun le même point E pour ſommet ; & leurs baſes B D & D A ſont chacune ſur la même ligne droite BA. Ainſi, ils ont chacun la même hauteur ; & par conſéquent, BD eſt à DA, ce que le trian-
N. 406. gle BED eſt au triangle DEA (n).

Pareillement, les triangles BED & EDC ont chacun le même point D pour ſommet ; & leurs baſes BE & EC ſont chacune ſur la même ligne droite BC. Ainſi, ils ont auſſi chacun la même hauteur ; & par conſéquent, BE eſt à EC, ce que le trian-
N. 406. gle BED eſt au triangle EDC (n).

Or, le triangle BED a le même rapport au triangle DEA qu'au triangle EDC
N. 354. (n), puiſque ces deux derniers triangles qui ont la même baſe DE, & qui ſont entre les mêmes paralleles DE & AC [H],
N. 154. ſont égaux (n).

N. 350. Donc, BD . DA : : BE . EC (n).
Par conſéquent, C. Q. F. D.

SECONDEMENT. Dans le triangle
Fig. 8. ABC *, ſi BD . DA : : BE . EC, la ligne DE eſt parallele au côté AC.

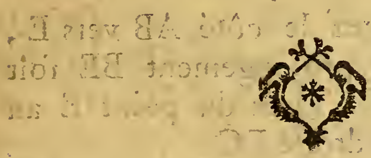
Conſt. La même que la précédente.

Démonſt.

Démonst. Par les mêmes raisons que dans la démonstration précédente, le triangle BED est au triangle DEA, ce que BD est à DA. Or, BD . DA :: BE . EC [H]; & BE est à EC, ce que le triangle BED est au triangle EDC. Donc, le triangle BED a le même rapport au triangle DEA qu'au triangle EDC (n). Par N. 350. conséquent, ces deux derniers triangles sont égaux (n). N. 356.

Or, puisque ces deux derniers triangles qui sont sur la même base DE, sont égaux, la ligne droite AC, qui est tirée du sommet A de l'un au sommet C de l'autre, est parallele à cette base (n). N. 157.

Donc, C. Q. F. 2° D.



PROPOSITION III.

THÉORÊME.

412. *Si une ligne droite divise en deux parties égales l'un quelconque des angles d'un triangle, les parties en lesquelles elle divise le côté qu'elle rencontre, sont proportionnelles aux deux autres côtés: & si ces parties sont proportionnelles aux deux autres côtés, elle divise l'angle en deux parties égales.*

PREMIÉREMENT. La ligne droite
Fig. 9. BD * qui divise en deux parties égales ABD & CBD l'angle B du triangle ABC, donne cette proportion, AD . DC :: AB . BC.

Const. Prolongez le côté AB vers E, jusqu'à ce que le prolongement BE soit égal au côté BC. Tirez du point E au point C, la ligne droite EC.

Démonst. L'angle ABC est extérieur au
N. 135. triangle EBC. Ainsi (n), il est égal à la somme des angles intérieurs BCE & E qui lui sont opposés. Or, ces angles inté-
N. 84. rieurs sont égaux (n); puisque les côtés BE & BC du triangle EBC le sont [c]. Donc, l'angle ABC est double de chacun

de ces mêmes angles; & par conséquent, de l'angle BCE.

Mais, le même angle ABC est aussi double de l'angle CBD [H]. Donc, les angles BCE & CBD sont égaux (n). N. 68. Ainsi, puisqu'ils sont alternes, la ligne BD est parallele au côté EC du triangle AEC (n). Par conséquent, AD . DC : : N. 126. AB . BE (n). Or, BE est égal à BC [C]. N. 411. Donc, AD . DC : : AB . BC.

Par conséquent, C. Q. F. 1° D.

SECONDEMENT. Si AD* . DC : : Fig. 9. AB . BC, la ligne droite BD divise l'angle B en deux parties égales ABD & CBD.

Conft. La même que la précédente.

Démonft. Puisque AD . DC : : AB . BC [H], & que BE est égal à BC [C], la ligne BD coupe proportionnellement les côtés AC & AE du triangle AEC. Par conséquent, elle est parallele au côté EC (n). N. 411.

Ainsi, les angles ABD & CBD sont égaux (n), l'un à l'angle intérieur E qui N. 130. lui est opposé, & l'autre à l'angle BCE qui lui est alterne. Or, ces deux derniers angles sont égaux (n), puisque les côtés N. 84. BC & BE du triangle EBC le sont [C].

N. 62. Donc, les deux premiers le ſont auſſi (n). Par conſéquent, C. Q. F. 2° D.

PROPOSITION IV.

Théorême.

413. *Les triangles qui ſont équiangles, ont leurs côtés pareils proportionnels.*

Fig. 10. Si dans les triangles ABC * & CDE, l'angle B eſt égal à l'angle D, l'angle BCA à l'angle E, & l'angle A à l'angle DCE, on a cette proportion, AC . CE :: AB . CD :: BC . DE.

Conſt. Poſez les triangles ABC & CDE ſur une même ligne droite AE; de maniere que les angles égaux DCE & A étant oppoſés, les angles égaux BCA & E le ſoient auſſi. Prolongez enſuite les côtés AB & ED, juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent à un point F.

Démonſt. Les lignes BC & FE ſont pa-
N. 128. ralleles (n); puiſque [H] l'angle extérieur BCA eſt égal à l'intérieur E qui lui eſt oppoſé. Or, il en eſt de même des lignes CD & AF; puiſque [H] l'angle extérieur DCE eſt auſſi égal à l'intérieur A qui lui eſt auſſi oppoſé. Donc, le quadrilatere
N. 57. BD eſt parallélogramme (n); & par con-

ſéquent, les côtés CD & BF ſont égaux, de même que les côtés BC & FD (n). N. 143.

Ainſi, la ligne BC eſt parallele au côté FE du triangle AFE [C]. Donc, AC . CE :: AB . BF (n). Par conſéquent, puiſ- N. 411. que les lignes CD & BF ſont égales [D], AC . CE :: AB . CD.

Pareillement, la ligne CD eſt auſſi parallele au côté AF du triangle AFE [C]. Donc, AC . CE :: FD . DE (n). Par N. 411. conſéquent, puiſque les lignes BC & FD ſont égales [D], AC . CE :: BC . DE.

Donc, C. Q. F. D.

SCHOLIE.

414. *Les Commençans n'auront aucune difficulté à ranger proportionnellement les côtés de deux triangles équiangles, ſi pour former chaque rapport ils prennent toujours un côté du premier triangle & un côté du ſecond, qui ſoient oppoſés à des angles égaux.*

USAGE.

415. *Lorſqu'un triangle dans lequel on ne connoît qu'un côté, eſt équiangle à quelque autre triangle dont les trois côtés ſont connus, il eſt facile de trouver chacun des deux côtés inconnus. Car, puiſque les côtés des triangles équiangles ſont proportion-*

N. 413. *nels* (n), *ces côtés inconnus sont les quatriemes termes de deux proportions, dont les autres termes sont les côtés connus de ces mêmes triangles.*

Ainsi, si l'on sçait que dans le triangle
Fig. 11. *ABC* les côtés AC, AB & BC sont, par exemple, l'un de 9 parties égales, l'autre de* 6, *& le dernier de* 5; *& si dans le triangle DEF qui est équiangle au triangle ABC, on connoît que le côté DF est, par exemple,*
N. 364. *de* 27 *toises : on trouve* (n) *que le côté DE est de* 18 *toises, & le côté EF de* 15; *puis-*
N. 413. *que* (n) *AC*, (9). *DF*, (27) :: *AB*, (6). *DE*, (18) :: *BC*, (5). *EF*, (15).

Au reste, il faut remarquer que cette proposition est de toutes les propositions de la Géométrie, celle qui est la plus considérable, & dont on fait le plus fréquemment usage. C'est sur elle que toute la Trigonométrie est fondée; particuliérement le Traité que j'en ai donné, & qui se trouve à Paris, chez JOMBERT, *fils aîné, rue Dauphine.*



PROPOSITION V.

THÉORÊME.

416. *Les triangles qui ont leurs côtés proportionnels, sont équiangles.*

DANS les triangles ABC * & DEF, si AC . DF : : AB . DE : : BC . EF ; l'angle B est égal à l'angle E, l'angle C à l'angle EFD ; & l'angle A l'angle EDF. Fig 12.

Const. Décrivez sous la ligne DF (n), l'angle GDF qui ait le point D pour sommet, & soit égal à l'angle A ; & l'angle GFD qui ait le point F pour sommet, & soit égal à l'angle C. N. 119

Démonst. Les triangles ABC & DGF sont équiangles [C]. Ainsi, AB . DG : : AC . DF (n). Mais, AC . DF : : AB . DE [H]. Donc, AB . DG : : AB . DE (n) ; & par conséquent, DG est égal à DE (n). N. 413. N. 350. N. 356.

Pareillement, BC . FG : : AC . DF (n) ; mais, AC . DF : : BC . EF [H]. Donc, BC . FG : : BC . EF (n) ; & par conséquent, FG est égal à EF (n). N. 413. N. 350. N. 356.

Ainsi, les triangles DEF & DGF ont les côtés égaux aux côtés, chacun à chacun. Donc, ces triangles sont équiangles

N. 88. (n). Or, les triangles DGF & ABC le ſont auſſi [c]. Donc, les angles du triangle ABC, & ceux du triangle DEF, ſont
N. 62. égaux, chacun à chacun (n).

Par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION VI.

THÉORÊME.

417. *Les triangles qui ont un angle égal à un angle, & les côtés qui forment ce premier angle, proportionnels à ceux qui forment ce ſecond angle, ſont équiangles.*

Fig. 12. DANS les triangles ABC * & DEF, dont l'angle A eſt égal à l'angle EDF, ſi AC . DF : : AB . DE ; l'angle B eſt égal à l'angle E, & l'angle C à l'angle EFD.

Conſt. La même que celle de la propoſition précédente.

Démonſt. Dans les triangles DEF & DGF, l'angle EDF eſt égal à l'angle
N. 62. GDF (n) ; puiſque l'un [H], & l'autre [c], ſont égaux au même angle A : le côté DE eſt égal au côté DG, par une démonſtration toute pareille à celle de la propoſition précédente ; & le côté DF eſt commun. Donc, l'angle EFD eſt égal à
N. 82. l'angle GFD, & l'angle E à l'angle G (n).

Par conséquent, ces deux triangles ſont équiangles.

Mais les triangles ABC & DGF le ſont auſſi [c]. Donc, les angles du triangle ABC, & ceux du triangle DEF, ſont égaux, chacun à chacun (n). N. 62.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION VII.

THÉORÊME.

418. *Enfin, deux triangles ſont encore équiangles, lorſqu'ils ont un angle égal à un angle, les côtés qui forment l'un quelconque des autres angles du premier, proportionnels aux côtés qui forment l'un quelconque des autres angles du ſecond; & le troiſieme angle du premier, de même eſpece que le troiſieme angle du ſecond.*

LES triangles ABC * & DEF, dont l'angle B eſt égal à l'angle E, & l'angle C de même eſpece que l'angle EFD, ſont équiangles; ſi AB . DE : : AC . DF. Fig. 13.

Conſt. Prolongez le côté EF vers G, à volonté. Tirez du point D aux points G & H, pris à volonté, l'un au deſſous du point

F, & l'autre au deſſus, les lignes droites DG & DH.

Démonſt. Si l'angle A eſt égal à l'angle EDF, les triangles ABC & DEF ſont
N. 137. équiangles (n). Ainſi, il s'agit de démontrer que ces deux angles ſont égaux.

Or, l'angle A n'eſt point égal à un angle EDG, plus grand que l'angle EDF; puiſque s'il l'étoit, les triangles ABC &
N. 137. DEG feroient équiangles (n). Ainſi, le rapport de AB à DE, qui eſt égal à celui de AC à DF [H], le feroit auſſi à celui de
N. 413. AC à DG (n). Donc, AC auroit à DF
N. 350. le même rapport qu'à DG (n). Par con-
N. 356. ſéquent, DF feroit égal à DG (n).

Mais, ſi DF étoit égal à DG, le triangle FDG feroit iſoſcele. Donc, l'angle EFD
N. 97. feroit obtus (n), puiſque les angles DFG
N. 105. & G feroient néceſſairement aigus (n). Par conſéquent, l'angle C, qui feroit égal à l'angle G, & l'angle EFD ne feroient point de même eſpece.

L'angle A n'eſt point non plus égal à un angle EDH, plus petit que l'angle EDF; puiſque, s'il l'étoit, les triangles
N. 137. ABC & DEH feroient équiangles (n). Ainſi, le rapport de AB à DE, qui eſt égal à celui de AC à DF [H], le feroit
N. 413. auſſi à celui de AC à DH (n). Donc, AC auroit à DF le même rapport qu'à

DH (n). Par conséquent, DF seroit égal N. 350.
à DH (n). N. 356.

Mais, si DF étoit égal à DH, le triangle FDH seroit isoscele. Donc, l'angle EHD seroit obtus (n), puisque les angles N. 97. DHF & EFD seroient nécessairement aigus (n). Par conséquent, l'angle C, qui N. 105. seroit égal à l'angle EHD, & l'angle EFD ne seroient point encore de même espece.

Or, ces angles C & EFD doivent être de même espece [H]. Donc, l'angle A n'est égal, ni à un angle EDG, plus grand que l'angle EDF; ni à un angle EDH, plus petit que ce même angle. Donc, les angles A & EDF sont égaux; & par conséquent, les triangles ABC & DEF sont équiangles.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

419. Il suit du n° 400, & des n° 413, 416, 417 & 418, que *dans tous les cas auxquels les triangles sont équiangles, ils sont semblables.*



PROPOSITION VIII.

THÉORÊME.

420. *La perpendiculaire abaissée de l'angle droit d'un triangle rectangle, au côté opposé, divise ce triangle en deux autres qui lui sont semblables.*

Fig. 14. LA perpendiculaire BD * divise le triangle rectangle ABC en deux triangles ADB & BDC, qui sont semblables au triangle ABC.

Démonst. Dans les triangles ABC & ADB, qui sont rectangles, l'un en B & l'autre en D [H], l'angle A est commun. Donc, l'angle C est égal à l'angle ABD
N. 137. (n).

Pareillement, dans les triangles ABC & BDC, qui sont aussi rectangles, l'un en B & l'autre en D [H], l'angle C est commun. Donc, l'angle A est égal à
N. 137. l'angle CBD (n).

Or, puisque les triangles ABC, ADB & BDC sont équiangles, ils sont sembla-
N. 419. bles (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

421. Il ſuit de ce théorême : premiérement, que *la perpendiculaire abaiſſée de l'angle droit d'un triangle rectangle, au côté oppoſé, eſt moyenne proportionnelle entre les ſegmens de ce côté.*

Dans le triangle ABC* qui eſt rectangle en B, la perpendiculaire DB donne cette proportion, AD . DB : : DB . DC. Fig. 14.

Démonſt. Les triangles ADB & BDC, ſont équiangles (n). Ainſi, AD . DB : : N. 420. DB . DC (n). N. 413.

Secondement, que *dans un triangle rectangle, chaque côté eſt moyen proportionnel entre l'hypothénuſe & le ſegment avec lequel il a un point de commun.*

Dans le triangle précédent*, la perpendiculaire DB donne ces deux proportions, Fig. 14. AC . AB : : AB . AD, & AC . BC : : BC . DC.

Démonſt. Les triangles ABC & ADB ſont équiangles (n). Ainſi, AC . AB : : N. 420. AB . AD (n). N. 413.

Pareillement, les triangles ABC & BDC ſont équiangles (n). Ainſi, AC . N. 420. BC : : BC . DC (n). N. 413.

** Troiſiémement, enfin, que *dans un triangle rectangle, les côtés ſont moyens*

proportionnels entre l'hypothénuſe & la perpendiculaire.

Démonſt. Dans le même triangle pré-
Fig. 14. cédent *, on a encore cette proportion, AC . AB :: BC . DB.

Démonſt. Les triangles ABC & ADB
N. 420. ſont équiangles (n). Ainſi, AC . AB ::
N. 413. BC . DB (n).

Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION IX.

PROBLÊME.

422. *Couper telle partie que l'on voudra d'une ligne droite donnée.*

Il faut couper, par exemple, les trois
Fig. 15. cinquiemes de la ligne droite AB *.

Conſt. Tirez du point A, une ligne droite indéfinie AH, qui forme avec la ligne AB, un angle quelconque HAB. Enſuite, puiſque l'on demande des cinquiemes, prenez à volonté ſur la ligne AH, 5 parties égales AC, CD, &c. Du point G, auquel la cinquieme partie ſe termine, tirez au point B, la ligne droite GB. Enfin, parce que l'on de-
N. 133. mande 3 parties, tirez (n) de l'extrémité

E de la troisieme partie, la parallele EI à la ligne GB. La partie AI sera les $\frac{3}{5}$ demandés.

Démonst. Puisque les lignes EI & GB sont paralleles [c], l'angle extérieur AIE est égal à son opposé intérieur ABG (n). N. 130.
Ainsi, les triangles AEI & AGB, qui ont l'angle A de commun, sont équiangles (n). Par conséquent, AE . AG :: N. 137.
AI . AB (n). N. 413.

Or, la partie AE est les $\frac{3}{5}$ de la ligne AG [c]. Donc, la partie AI est aussi les $\frac{3}{5}$ de la ligne AB (n). N. 330.

Par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION X.

PROBLÊME.

423. *Diviser une ligne droite, de la même maniere dont une autre ligne droite est divisée.*

Il faut diviser la ligne droite AB *, de la même maniere dont la ligne droite CD est divisée. Fig. 16.

Const. Tirez du point A, une ligne droite indéfinie AI, qui forme avec la ligne AB, un angle quelconque BAI.

Prenez ſur cette ligne AI, la partie AG égale à la partie CK, la partie AH égale à la partie CL, & la partie AI égale à la ligne CD. Tirez du point I au point B,
N. 133. la ligne droite IB. Enfin (n), tirez des points G & H, les paralleles GE & HF à la ligne IB. Les ſegmens AE & AF, ſont les parties demandées.

Démonſt. Puiſque les lignes GE, HF & IB ſont paralleles [c], les angles extérieurs AGE & AHF ſont égaux chacun
N. 130. (n) à l'angle intérieur AIB qui leur eſt oppoſé. Ainſi, les triangles AEG, AFH & ABI, qui ont l'angle A de commun,
N. 137. ſont équiangles (n). Par conſéquent, AE. AB :: AG. AI; & AF. AB :: AH.
N. 413. AI (n).

Mais, les parties CK & CL & la ligne CD, ſont égales aux parties AG, AH & AI, chacune à chacune [c]. Donc, AE. AB :: CK. CD; & AF. AB ::
N. 61. CL. CD (n).

Par conſéquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION XI.

PROBLÊME.

424. *Trouver une troisieme proportionnelle à deux lignes droites données.*

Il faut trouver une troisieme proportionnelle aux deux lignes droites A * & B. Fig. 17.

Conſt. Tirez deux lignes droites indéfinies DE & DC, qui forment un angle quelconque CDE. Prenez ſur la ligne DE, la partie DF égale à la ligne A, & la partie FG égale à la ligne B. Prenez auſſi ſur la ligne DC, la partie DH égale à la même ligne B. Tirez du point F au point H, la ligne droite FH. Enfin (n), tirez du N. 133. point G, la parallele GI à la ligne FH. Le ſegment HI ſera la troiſieme proportionnelle demandée.

Démonſt. Dans le triangle DIG, la ligne FH eſt parallele au côté GI [c]. Ainſi, DF. FG :: DH. HI (n). Par N. 411. conſéquent, puiſque les lignes A & B ſont égales, l'une au ſegment DF, & l'autre à chacun des ſegments FG & DH [c], on a cette proportion, A. B :: B. HI (n). N. 61.

Donc, C. Q. F. F.

PROPOSITION XII.

PROBLÊME.

425. *Trouver une quatrieme proportionnelle à trois lignes droites données.*

IL faut trouver une quatrieme propor-
Fig. 18. tionnelle aux trois lignes droites A *, B & C.

Conſt. Tirez deux lignes droites indéfinies EF & ED, qui forment un angle quelconque DEF. Prenez ſur la ligne EF, la partie EG égale à la ligne A, & la partie GH égale à la ligne B. Prenez auſſi ſur la ligne ED, la partie EI égale à la ligne C. Tirez du point G au point I,
N. 133. la ligne droite GI. Enfin (n), tirez du point H, la parallele HK à la ligne GI. Le ſegment IK ſera la quatrieme proportionnelle demandée.

Démonſt. Dans le triangle EKH, la ligne GI eſt parallele au côté HK [c].
N. 411. Ainſi, EG . GH : : EI . IK (n). Par conſéquent, puiſque les lignes A, B & C ſont égales aux ſegmens EG, GH & EI, chacune à chacun [c], on a cette proportion,
N. 61. A . B : : C. IK (n).

Donc, C. Q. F. F.

PROPOSITION XIII.

PROBLÊME.

426. *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes droites données.*

IL faut trouver une moyenne proportionnelle entre les lignes droites A * & B. Fig. 19.

Conſt. Tirez une ligne droite indéfinie CD. Prenez ſur cette ligne, la partie CE égale à la ligne A, & la partie EF égale à la ligne B. Diviſez (n) la partie CF N. 93. en deux parties égales CG & GF. Du point G, pris pour centre, & avec l'une de ces parties égales, priſe pour rayon, décrivez le demi-cercle CHF. Enfin (n), N. 95. du point E, élevez dans ce même demi-cercle, la perpendiculaire EH à la ligne CD. Cette perpendiculaire ſera la moyenne demandée.

Pour la démonſtration. Tirez du point H aux points C & F, les lignes droites HC & HF.

Démonſt. L'angle CHF eſt un angle droit (n), puiſqu'il eſt inſcrit dans le demi- N. 263. cercle CHF [c]. Ainſi, la ligne EH eſt une perpendiculaire abaiſſée de l'angle droit du triangle rectangle CHF au côté oppoſé

CF [c]. Par conséquent, CE . EH ::
N. 421. EH . EF (n). Mais les lignes A & B sont égales l'une au segment CE, & l'autre au segment EF [c]. Donc, A . EH :: EH .
N. 61. B (n).

Par conséquent, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

427. *Il est quelquefois nécessaire de trouver plus d'une moyenne proportionnelle entre deux lignes droites données : mais, il est démontré qu'il n'est point possible de le faire par la Géométrie élémentaire. Cependant, plusieurs personnes, qui en toute autre chose ne manquent point de bon sens, le cherchent toujours avec ardeur, de même que la* trisection *de l'angle, la* quadrature *du cercle, &c. Il est bon que les jeunes gens sachent, qu'indépendamment de la présomption ridicule qu'il y a à faire ces sortes de recherches, il y a mille contre un à parier, que quiconque se flatte de faire de pareilles découvertes, ne sçait pas les premiers élémens de la Géométrie.*

La proposition dans laquelle il ne s'agit de trouver que deux moyennes proportionnelles, est connue sous le nom de problême de la duplication du cube.

PROPOSITION XIV.

THÉORÊME.

428. *Les parallélogrammes équiangles dont les ſurfaces ſont égales, ont leurs côtés réciproquement proportionnels : & ceux dont les côtés ſont réciproquement proportionnels, ont leurs ſurfaces égales.*

PREMIÉREMENT. Les parallélogrammes DB * & CF qui ſont équiangles, & Fig. 20.
dont les ſurfaces ſont égales, donnent cette proportion, DC . CE : : CG . CB.

Conſt. Diſpoſez ces parallélogrammes de maniere que les côtés CE & CG de l'un, deviennent les prolongemens des côtés DC & BC de l'autre. Prolongez enſuite les côtés AB & FE, juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent à un point H.

Démonſt. Le rapport du côté DC au côté CE, eſt égal à celui du parallélogramme DB au parallélogramme CH (n): N. 405.
le rapport du parallélogramme DB au parallélogramme CH, eſt égal à celui du parallélogramme CF au même parallélogramme CH (n); puiſque les parallélo- N. 354.
grammes DB & CF ſont égaux [H]: en-

fin, ce dernier rapport, eſt égal à celui
N. 405. du côté CG au côté CB (n). Donc, DC.
N. 350 CE : : CG . CB (n).

Par conſéquent, C. Q. F. 1° D.

SECONDEMENT. Les ſurfaces des pa-
Fig. 20. rallélogrammes équiangles DB * & CF
ſont égales, ſi DC. CE : : CG. CB.

Conſt. La même que la précédente.

Démonſt. Le rapport du parallélogramme DB au parallélogramme CH, eſt égal à
N. 405 celui du côté DC au côté CE (n); le rapport du côté DC au côté CE, eſt égal à celui du côté CG au côté CB [H]: enfin, ce dernier rapport eſt égal à celui du parallélogramme CF au parallélogramme CH
N. 405. (n). Donc, les deux parallélogrammes DB & CF ont chacun le même rapport au pa-
N. 350. rallélogramme CH (n). Par conſéquent,
N. 356. ils ſont égaux (n).

Donc, C. Q. F. 2° D.



PROPOSITION XV.

THÉORÊME.

429. *Les triangles qui ont un angle égal à un angle, & dont les surfaces sont égales, ont les côtés qui forment ces angles égaux réciproquement proportionnels : & ceux dont les côtés qui forment des angles égaux sont réciproquement proportionnels, ont leurs surfaces égales.*

PREMIÉREMENT. Les triangles ABC * & EDC qui ont l'angle ACB égal à l'angle DCE, & dont les surfaces sont égales, donnent cette proportion, AC . CD :: EC . CB. Fig. 21.

Const. Disposez ces triangles de maniere que les côtés CD & CE de l'un, deviennent les prolongemens des côtés AC & BC de l'autre. Tirez ensuite du point B au point D, la ligne droite BD.

Démonst. Le rapport du côté AC au côté CD, est égal à celui du triangle ABC au triangle CBD (n) : le rapport du triangle ABC au triangle CBD, est égal à celui du triangle EDC au même triangle CBD (n) ; puisque les triangles ABC & EDC sont égaux [H] : enfin, ce dernier N. 406. N. 354.

rapport eſt égal à celui du côté EC au
N. 406. côté CB (n). Donc, AC . CD :: EC .
N. 350. CB (n).

Par conſéquent, C. Q. F. 1° D.

Fig. 21. SECONDEMENT. Les ſurfaces des triangles ABC* & EDC dont l'angle ACB eſt égal à l'angle DCE, ſont égales, ſi AC . CD :: EC . CB.

Conſt. La même que la précédente.

Démonſt. Le rapport du triangle ABC au triangle CBD, eſt égal à celui du côté
N. 406. AC au côté CD (n); le rapport du côté AC au côté CD, eſt égal à celui du côté EC au côté CB [H]. Enfin, ce dernier rapport eſt égal à celui du triangle EDC
N. 406. au triangle CBD (n). Donc, les deux triangles ABC & EDC, ont chacun le
N. 350. même rapport au triangle CBD (n). Par
N. 356. conſéquent, ils ſont égaux (n).

Donc, C. Q. F. 2° D.

PROPOSITION

PROPOSITION XVI.

THÉORÊME.

430. *Si quatre lignes droites ſont proportionnelles, le rectangle des extrêmes eſt égal à celui des moyennes : & ſi quatre lignes droites ſont telles, que le rectangle des extrêmes ſoit égal à celui des moyennes, elles ſont proportionnelles.*

PREMIÉREMENT. Si AB *. EF : : EH. AD, le rectangle des extrêmes AB & AD, eſt égal à celui des moyennes EF & EH. Fig. 22.

Conſt. Faites le rectangle AC, dont la ligne A B ſoit l'un des côtés, & la ligne AD, l'autre. Faites auſſi le rectangle EG, dont la ligne EF ſoit l'un des côtés, & la ligne EH, l'autre.

Démonſt. Les parallélogrammes A C & EG ſont équiangles, puiſqu'ils ſont rectangles [C] : & leurs côtés ſont réciproquement proportionnels, puiſque AB. EF : : EH. AD [H]. Donc, ces parallélogrammes ſont égaux (n). N. 428.

Par conſéquent, C. Q. F. 1° D.

SECONDEMENT. Si les quatre lignes
Fig. 22. droites AB *, EF, EH & AD, ſont telles que le rectangle des extrêmes AB & AD, ſoit égal à celui des moyennes EF & EH; elles donnent cette proportion, AB . EF : : EH . AD.

Conſt. La même que la précédente.

Démonſt. Les parallélogrammes AC & EG ſont équiangles, puiſqu'ils ſont rectangles [C]: & leurs ſurfaces ſont égales [H]. Donc, leurs côtés ſont réciproquement
N. 428. proportionnels (n). Par conſéquent, AB . EF : : EH . AD.

Donc, C. Q. F. 2° D.

COROLLAIRE I.

431. Il ſuit de la ſeconde partie de ce théorême, que *dans le cercle, ſi deux cordes s'entrecoupent, leurs parties ſont réciproquement proportionnelles.*

Dans les cercles X (*Liv.* 3, *Fig.* 51, 52, 53 & 54.) les parties des cordes AB & CD qui s'entrecoupent au point F, donnent cette proportion, AF . CF : : FD . FB.

Démonſt. Le rectangle des parties AF & FB, eſt égal à celui des parties CF &
N. 268. FD (n). Donc, AF . CF : : FD . FB (n).
N. 430. Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

432. Il ſuit encore de la même ſeconde partie, que *ſi d'un même point pris hors d'un cercle, on tire deux ſécantes, ces deux ſécantes & leurs parties extérieures, ſont réciproquement proportionnelles.*

Au cercle X (*Liv.* 3, *Fig.* 57.) les ſécantes AC & AB, avec leurs parties extérieures AF & AE, donnent cette proportion AB . AC :: AF . AE.

Démonſt. Le rectangle de la ſécante AB & de la partie AE, eſt égal à celui de la ſécante AC & de la partie AF (n). N. 271.
Donc, AB . AC :: AF . AE (n). N. 430.

Par conſéquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION XVII.

THÉORÊME.

433. *Si trois lignes droites sont en proportion continue, le rectangle des extrêmes est égal au quarré de la moyenne : & si trois lignes droites sont telles, que le rectangle des extrêmes soit égal au quarré de la moyenne, elles sont en proportion continue.*

Fig. 23. PREMIÉREMENT. Si ∺ AB *. EF . AD, le rectangle des extrêmes AB & AD, est égal au quarré de la moyenne EF.

Const. Faites le rectangle AC, dont la ligne AB soit l'un des côtés, & la ligne
N. 170. A D, l'autre. Décrivez ensuite (n) le quarré EG, sur la ligne EF.

Démonst. Les parallélogrammes AC & E G sont équiangles, puisqu'ils sont rectangles [c] : & leurs côtés sont réciproquement proportionnels ; puisque, AB . E F :: EF . AD [H], & que E H est
N. 50. égal à EF (n). Donc, ces parallélogram-
N. 428. mes sont égaux (n).

Par conséquent, C. Q. F. 1° D.

SECONDEMENT. Si les trois lignes

droites AB *, EF & AD, ſont telles Fig. 23.
que le rectangle des extrêmes AB & AD,
ſoit égal au quarré de la moyenne EF;
elles donnent cette proportion, AB . EF : :
EF . AD.

Conſt. La même que la précédente.

Démonſt. Les parallélogrammes AC & EG ſont équiangles, puiſqu'ils ſont rectangles [C] : & leurs ſurfaces ſont égales [H]. Donc, leurs côtés ſont réciproquement proportionnels (n); & par con- N. 428.
ſéquent, AB . EF : : EH . AD. Or, EF
eſt égal à EH (n). Donc, AB . EF : : EF . N. 50.
AD (n). N. 61.

Par conſéquent, C. Q. F. 2° D.

COROLLAIRE.

434. Il ſuit de la ſeconde partie de ce theorême, que *ſi d'un même point pris hors d'un cercle, on tire une tangente & une ſécante, cette tangente eſt moyenne proportionnelle entre cette ſécante & ſa partie extérieure.*

Au cercle X (*Liv.* 3, *Fig.* 55 & 56) la ſécante AC, ſa partie extérieure AD, & la tangente AB, donnent cette proportion, AC . AB : : AB . AD.

Démonſt. Le rectangle de la ſécante AC & de ſa partie AD, eſt égal au quarré

N. 270. de la tangente AB (n). Donc, AC . AB ::
N. 433. AB . AD (n).

Par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XVIII.

PROBLÊME.

435. *Décrire ſur une ligne droite donnée, une figure qui ſoit ſemblable à une figure rectiligne auſſi donnée.*

Fig. 24. IL faut décrire ſur la ligne droite EF * une figure qui ſoit ſemblable à une figure rectiligne DB.

Conſt. Diviſez en triangles ACB & ADC, la figure propoſée DB. Décrivez
N. 119. enſuite ſur la ligne EF (n), un angle GEF qui ait le point E pour ſommet, & ſoit égal à l'angle CAB ; & un angle F qui ait le point F pour ſommet, & ſoit égal à l'angle B. Décrivez auſſi ſur la ligne EG
N. 119. (n), un angle GEH qui ait le point E pour ſommet, & ſoit égal à l'angle CAD ; & un angle EGH qui ait le point G pour ſommet, & ſoit égal à l'angle ACD. La figure rectiligne HF, que les côtés de ces angles forment ſur la ligne EF, eſt la figure demandée.

Démonst. Premiérement, les angles GEF & GEH, CAB & CAD sont égaux chacun à chacun [c]. Ainsi, l'angle HEF est égal à l'angle DAB.

L'angle F est égal à l'angle B [c].

Les angles EGF & ACB sont égaux (n); N. 137.
& les angles EGH & ACD le sont aussi [c]. Ainsi, les angles FGH & BCD sont égaux.

Enfin, l'angle H est égal à l'angle D (n). N. 1 7.

Secondement. Les triangles EGF & ACB sont équiangles [c]. Ainsi, EF . AB :: FG . BC (n). N. 413.

Les triangles EHG & ADC sont aussi équiangles [c]. Ainsi, EH . AD :: HG . DC (n). N. 413.

Enfin, les triangles EGF & ACB sont équiangles [c]; & les triangles EHG & ADC le sont aussi [c]. Donc, EF . AB :: EG . AC :: EH . AD (n). Par N. 413.
conséquent, EF . AB :: EH . AD (n). N. 350.

Ainsi, dans les figures rectilignes HF & DB, les angles sont égaux aux angles, chacun à chacun; & les côtés qui forment ces angles égaux, sont proportionnels. Donc, ces figures sont semblables (n). N. 400.

Par conséquent, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

436. *Si la figure proposée avoit un plus*

grand nombre de côtés, on la diviſeroit en un plus grand nombre de triangles, que l'on rapporteroit l'un après l'autre ſur les côtés des triangles de la figure HF; de la même maniere dont on vient de rapporter le triangle ADC ſur le côté EG.

USAGE.

437. *On ſe ſert de cette propoſition, pour lever le plan d'un bâtiment, d'une ville, d'un champ, d'une forêt, &c. & même celui d'un pays; car, lever un plan, c'eſt décrire ſur une ligne droite donnée, une figure qui ſoit ſemblable à celle de la choſe dont on veut lever le plan.*



PROPOSITION XIX.

THÉORÊME.

438. *Les triangles semblables sont entr'eux en rapport doublé de celui de leurs côtés pareils.*

LES triangles semblables ABC * & DEF Fig. 25.
sont entr'eux en rapport doublé de celui de leurs côtés pareils; par exemple, de celui du côté AC au côté DF.

Conft. Cherchez (n) une troisieme pro- N. 424.
portionnelle aux côtés AC & DF. Prenez sur le côté AC, une partie AG égale à cette troisieme proportionnelle. Tirez ensuite du point B au point G, la ligne droite BG.

Démonft. Les triangles ABC & DEF sont semblables [H]. Ainsi, AB . DE : : AC . DF (n). Or, AC . DF : : DF . AG N. 413.
[C]. Donc, AB . DE : : DF . AG (n). Par N. 350.
conséquent, puisque l'angle A est égal à l'angle D [H], les triangles ABG & DEF sont égaux (n). N. 429.

Mais, le triangle ABC est au triangle ABG, ce que le côté AC est au côté AG (n). Donc, le même triangle ABC est N. 406.
aussi au triangle DEF, ce que le côté AC

N. 354. eſt au côté AG (n). Ainſi, puiſque le rapport qui eſt entre ces deux côtés, eſt dou-
N. 348. blé de celui du côté AC au côté DF (n), le rapport du triangle ABC au triangle DEF, eſt auſſi doublé du même rapport.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XX.

THÉORÊME.

439. *Les polygones ſemblables peuvent être diviſés chacun en un pareil nombre de triangles ſemblables, chacun à chacun: ils ſont proportionnels à ceux de ces triangles qui ſe correſpondent: enfin, ils ſont entr'eux en rapport doublé de celui de leurs côtés pareils.*

PREMIÉREMENT. Les polygones
Fig. 26. ſemblables EB * & KG peuvent être diviſés l'un & l'autre, en un pareil nombre de triangles ſemblables, chacun à chacun.

Conſt. Du ſommet de l'un quelconque A des angles du polygone EB, tirez aux points C & D, les lignes droites AC & AD. Du point F, qui correſpond au point

A, tirez aux points H & I, les lignes droites FH & FI.

Démonst. Puisque les polygones EB & KG sont semblables [H], il y a dans le premier autant d'angles opposés à l'angle A, qu'il y en a dans le second d'opposés à l'angle F. Or [C], on a divisé le premier polygone, par des lignes droites tirées de l'angle A à chaque angle opposé à l'angle A; & le second, par des lignes droites tirées de l'angle F à chaque angle opposé à l'angle F. Donc, on a divisé chacun de ces polygones, par un pareil nombre de lignes droites. Par conséquent, on les a divisés l'un & l'autre, en un pareil nombre de triangles.

Or, ces triangles sont semblables (n). N. 400.
Car premiérement, les triangles ABC & FGH le sont (n); puisque les angles B & N. 7
G sont égaux, & que AB . FG :: BC .
GH (n). Secondement, les triangles AED N. 400.
& FKI le sont (n); puisque les angles E N. 417.
& K sont égaux, & que AE . FK :: ED .
KI (n). Troisiémement, enfin, les triangles N. 400.
ACD & FHI le sont aussi (n). Car, les N. 416.
triangles semblables ABC & FGH donnent cette proportion, AC . FH :: BC .
GH (n). Or, BC . GH :: CD . HI (n). N. 413.
Donc, AC . FH :: CD . HI (n). Et en N. 400. N. 350.
comparant entr'eux les triangles semblables

EAD & KFI, on démontre par un pareil raiſonnement, que AD. FI :: CD. HI.

Par conſéquent, C. Q. F. 1° D.

SECONDEMENT. Si les polygones
Fig. 26. ſemblables EB* & KG, ſont pareillement diviſés chacun en un égal nombre de triangles, par exemple, AED, ACD & ABC, FKI, FHI & FGH; le polygone EB eſt au polygone KG, ce que l'un quelconque des triangles du premier, par exemple le triangle AED, eſt au triangle correſpondant FKI.

Démonſt. Le rapport du triangle AED au triangle FKI, eſt doublé de celui du
N. 438. côté ED au côté KI (n): le rapport du triangle ACD au triangle FHI, eſt auſſi doublé du même rapport; puiſqu'il eſt doublé du rapport du côté CD au côté
N. 438. HI (n), qui eſt le même que celui de ED
N. 400. à KI (n): enfin, le rapport du triangle ABC au triangle FGH, eſt encore doublé du même rapport; puiſqu'il eſt doublé du
N. 438. rapport du coté AB au côté FG (n), qui eſt auſſi le même que celui de ED à KI
N. 400. (n). Donc, le triangle AED eſt au triangle FKI, ce que le triangle ACD eſt au triangle FHI, ce que le triangle ABC eſt
N. 350. au triangle FGH (n). Par conſéquent, le

polygone EB, (qui eſt la ſomme des triangles antécédens AED, ACD & ABC), eſt au polygone KG, (qui eſt celle des triangles conſéquens FKI, FHI & FGH), ce que le triangle antécédent AED, eſt à ſon triangle conſéquent FKI (n). N. 379.

Donc, C. Q. F. 2° D.

TROISIÉMEMENT. Enfin, les polygones ſemblables EB * & KG ſont entr'eux Fig. 26. en rapport doublé de celui de leurs côtés pareils; par exemple, de celui du côté ED au côté KI.

Démonſt. Le rapport du polygone EB au polygone KG, eſt le même que celui du triangle AED au triangle FKI [D]. Or, le rapport qui eſt entre ces deux triangles, eſt doublé de celui du côté ED au côté KI (n). Donc, le rapport qui N. 438. eſt entre ces deux polygones, en eſt auſſi doublé.

Par conſéquent, C. Q. F. 3° D.

COROLLAIRE.

440. Il ſuit de la derniere partie de ce théorême, que *ſi trois lignes droites ſont en proportion continue, un polygone quelconque décrit ſur la premiere, eſt à un polygone ſemblable & ſemblablement poſé*

sur la seconde, ce que cette premiere ligne est à la troisieme.

Fig. 27. Si les trois lignes droites A *, B & C sont en proportion continue, un polygone quelconque décrit sur la ligne A, est à un polygone semblable & semblablement posé sur la ligne B, ce que la ligne A est à la ligne C.

Démonst. Le rapport d'un polygone décrit sur la ligne A, à un polygone semblable & semblablement posé sur la ligne B, est doublé du rapport qui est entre
N. 439. ces deux lignes (n). Or, le rapport de la ligne A à la ligne C, est aussi doublé de
N. 348. ce même rapport (n). Donc, le rapport d'un polygone décrit sur la ligne A, à un polygone semblable & semblablement posé sur la ligne B, est le même que celui
N. 350. lui de la ligne A à la ligne C (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.

USAGE.

441. *On se sert de ce corollaire, pour résoudre les deux problêmes suivans.*

PREMIER. Connoître le rapport d'un
Fig. 26. polygone quelconque EB *, à un polygone semblable KG.

N. 424. Solution. *Cherchez* (n) *une troisieme proportionnelle à deux quelconques des côtés*

pareils de ces polygones ; par exemple, aux côtés ED & KI. Le polygone EB est au N. 440.
polygone KG (n), *ce que le côté ED sera à cette troisieme proportionnelle.*

SECOND. Décrire un polygone, qui soit semblable au polygone EB * ; & qui Fig. 26.
en soit, par exemple, les deux tiers.

Solution. *Cherchez* (n) *une moyenne* N. 426.
proportionnelle KI entre l'un quelconque des côtés du polygone EB, & les deux tiers de ce côté ; par exemple, entre le côté ED & ses deux tiers. Décrivez ensuite sur cette moyenne (n), *un polygone KG,* N. 435.
semblable au polygone proposé EB. Ce polygone sera les deux tiers du polygone EB. Car, puisque les trois lignes ED, KI & les deux tiers de ED, sont en proportion continue [c], *le polygone EB, décrit sur la premiere, est au polygone semblable KG, décrit sur la seconde, ce que la premiere est à la troisieme* (n). *Or, cette troisieme est les* N. 440.
deux tiers de cette premiere [c].

Donc, C. Q. F. F.



PROPOSITION XXI.

* THÉORÊME.

442. *Les circonférences des polygones semblables, sont proportionnelles aux lignes droites semblablement tirées dans ces polygones.*

Fig. 26. DANS les polygones semblables ACE* & FHK, la circonférence ABCDEA du premier, est à la circonférence FGHIKF du second, ce que les lignes droites semblablement tirées dans ces polygones, par exemple les lignes AC & FH, sont entr'elles.

Démonst. Puisque les polygones ACE & FHK sont semblables [H], leurs côtés AB, FG, BC, GH, CD, HI, DE,
N. 400. IK, EA & KF sont proportionnels (n). Ainsi, la somme ABCDEA des antécédents AB, BC, &c, c'est-à-dire la circonférence du premier polygone, est à la somme FGHIKF des conséquents FG, GH, &c. c'est-à-dire à la circonférence du second polygone, ce que l'antécédent
N. 379. AB est à son conséquent FG (n).
N. 413. Mais, AB . FG :: AC . FH (n); puis-

que les triangles ABC & FGH ſont ſemblables (n). Donc, la circonférence N. 439.
ABCDEA eſt à la circonférence FGHIKF, ce que la ligne AC eſt à la ligne FH (n). N. 350.
Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

443. Il ſuit de ce théorême & du n° 408, que *les circonférences des cercles ſont proportionnelles aux diametres de ces mêmes cercles.*

SCHOLIE.

444. *Comme on ne peut meſurer immédiatement aucune ligne courbe* (n), *les Géo-* N. 148.
metres ont fait les plus grands efforts pour connoître le rapport de la circonférence du cercle à ſon diametre. Mais, juſqu'à préſent, toutes leurs tentatives ont été ſans ſuccès. Ainſi, dans le peu d'eſpérance d'y pouvoir jamais parvenir, ils ſe ſont réduits à chercher les moyens d'en approcher le plus près qu'il ſeroit poſſible.

Or, de tous ceux qui ont tenté ce grand œuvre géométrique, Archimede eſt celui qui a pris la route la plus ſimple. Il eſt vrai qu'elle ne conduira jamais à déterminer rigoureuſement le juſte rapport du diametre du cercle à ſa circonférence. Mais, comme on

n'a encore rien trouvé de mieux, nous allons enſeigner la maniere dont il s'y prit.

Il conſidéra, que la circonférence d'un cercle eſt toujours plus grande que celle de tout polygone qui lui eſt inſcrit ; & plus petite au contraire, que celle de tout polygone qui lui eſt circonſcrit.

En partant de ce principe, il prit le diametre d'un cercle quelconque pour l'unité, & calcula de combien devoit être, dans cette ſuppoſition, le côté du polygone régulier de 96 côtés, inſcrit dans ce cercle ; & celui du polygone ſemblable, circonſcrit au même cercle. Il multiplia enſuite ſes réſultats, chacun par 96 ; ce qui lui donna $3\frac{10}{71}$, & un peu plus, pour la circonférence du premier polygone ; & $3\frac{1}{7}$, & un peu moins, pour celle du ſecond. D'où il tira cette concluſion, que la circonférence du cercle eſt un peu plus grande que le produit de ſon diametre multiplié par $3\frac{10}{71}$; & un peu plus petite au contraire, que le produit du même diametre multiplié par $3\frac{1}{7}$.

Or, ces deux produits ne different l'un de l'autre que de $\frac{1}{497}$. Donc, ſi pour avoir la circonférence d'un cercle, on multiplie par $3\frac{1}{7}$ la valeur de ſon diametre, on eſt ſûr que ſur un cercle qui auroit 497 pieds de diametre, on ne fait pas une erreur d'un pied de trop. Et comme cette approximation eſt

ſuffiſante pour la pratique, on prend ordinairement le rapport de 7 à 22 pour celui du diametre d'un cercle à ſa circonférence.

Si l'on en vouloit cependant un qui fût encore plus exact, on ſe ſerviroit de celui de 113 *à* 355. *On ne feroit pas alors une erreur d'un pied de trop, ſur la circonférence d'un cercle dont le diametre ſeroit de* 1000000 *de pieds.*

PROPOSITION XXII.

THÉORÊME.

445. *Si quatre lignes droites ſont proportionnelles, les polygones ſemblables & ſemblablement poſés ſur les deux premieres, ſont proportionnels aux polygones ſemblables & ſemblablement poſés ſur les deux dernieres : & ſi deux polygones ſemblables ſont proportionnels à deux autres polygones auſſi ſemblables, les côtés des premiers ſont proportionnels aux côtés pareils des derniers.*

PREMIÉREMENT. Si AB * . CD : : EF . GH, les polygones AIB & CKD, qui ſont ſemblables & ſemblablement poſés ſur les deux premieres, ſont proportionnels aux polygones EM & GO, qui ſont auſſi Fig 29.

femblables & femblablement pofés fur les deux dernieres.

Démonft. Puifque [H] les polygones AIB & CKD font femblables, le rapport du premier au fecond eft doublé du rapport
N. 439. du côté AB au côté CD (n) : & par une raifon pareille, le rapport du polygone EM au polygone GO, eft doublé du rapport du côté EF au côté GH. Or, le rapport du côté AB au côté CD, eft le même que celui du côté EF au côté GH [H]. Donc, le rapport du polygone AIB au polygone CKD, eft auffi le même que celui du po-
N. 350. lygone EM au polygone GO (n).

Par conféquent, C. Q. F. 1° D.

Fig. 29. SECONDEMENT. Si les polygones femblables AIB * & CKD, font proportionnels aux polygones EM & GO, qui font auffi femblables; les côtés, par exemple AB & CD des deux premiers, font proportionnels aux côtés pareils EF & GH des deux derniers.

Démonft. Si les quatre lignes droites AB, CD, EF & GH n'étoient point proportionnelles; une quatrieme proportionnelle aux trois premieres, feroit ou plus grande, ou plus petite, que la ligne GH.

Or, fi l'on décrivoit fur cette quatrieme

(n), un polygone qui fût ſemblable au polygone GO, & ſemblablement poſé; il ſeroit auſſi plus grand, ou plus petit, que le polygone GO. Par conſéquent, il ne ſeroit point proportionnel aux polygones AIB, CKD & EM. N. 435.

Mais [D], lorſque quatre lignes droites ſont proportionnelles, les polygones ſemblables, qui ſont ſemblablement poſés ſur elles, ſont auſſi proportionnels. Donc, puiſque les polygones ſemblables A I B, CKD, &c. qui ſeroient ſemblablement poſés ſur les trois lignes AB, CD, EF, & ſur une quatrieme plus grande ou plus petite que GH, ne ſeroient point proportionnels, ces trois lignes, & une quatrieme plus grande, ou plus petite que GH, ne ſont point proportionnelles. Par conſéquent, les lignes AB, CD, EF & GH, le ſont.

Donc, C. Q. F. 2° D.

COROLLAIRE.

446. Il ſuit de la premiere partie de ce théorême, que *ſi trois lignes droites ſont en proportion continue, les polygones ſemblables, & ſemblablement poſés ſur ces trois lignes, ſont auſſi en proportion continue:* & de la ſeconde partie, que *ſi trois*

polygones ſemblables ſont en proportion continue, leurs côtés pareils le ſont auſſi.

PROPOSITION XXIII.

THÉORÊME.

447. *Les parallélogrammes équiangles ſont entr'eux en rapport compoſé de ceux de leurs côtés.*

Fig. 30. LES parallélogrammes équiangles AC * & BF, ſont entr'eux en rapport compoſé de celui du côté AB au côté BE, & de celui du côté BC au côté BG; c'eſt-
N. 343. à-dire (n), ce que le produit de AB multiplié par BC, eſt à celui de BE multiplié par BG.

Conſt. Diſpoſez les parallélogrammes AC & BF, de maniere que les côtés BE & BG, deviennent les prolongemens des côtés AB & CB. Décrivez enſuite ſur le côté AB, le rectangle AI, dont le côté BI ſoit égal au côté BC; & ſur le côté BE, le rectangle BL, dont le côté BM ſoit égal au côté BG. Enfin, prolongez les côtés DC & FE, juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent à un point H; & les côtés KI & LE, juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent à un point N.

Démonst. Le parallélogramme AC est au parallélogramme BH, ce que le rectangle AI est au rectangle BN (n); puisque ces parallélogrammes, de même que ces rectangles sont entr'eux, ce que AB est à BE (n). N. 350. N. 405.

Or, par une pareille raison, le parallélogramme BH est au parallélogramme BF, ce que le rectangle BN est au rectangle BL. Donc (n), le parallélogramme AC est au parallélogramme BF, ce que le rectangle AI est au rectangle BL. Mais (n), le rectangle AI est le produit de AB multiplié par BI, qui est égal à BC [c] : & le rectangle BL est le produit de BE multiplié par BM, qui est égal à BG [c]. Donc, le parallélogramme AC est au parallélogramme BF, ce que le produit de AB multiplié par BC, est à celui de BE multiplié par BG. N. 388. N. 149.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

448. Il suit de ce théorême, que *les triangles qui ont un angle égal à un angle, sont entr'eux en rapport composé de ceux des côtés qui forment ces angles égaux* †.

† Des Auteurs modernes ont écrit que cette proposition ne se trouve dans aucun Livre d'Elémens ; & qu'elle est de *Scooten*, commentateur de la Géométrie de Descartes. Ces Auteurs n'avoient point lu Euclide.

PROPOSITION XXIV.

THÉORÊME.

449. *Les parallélogrammes qui ont un angle de commun, & leurs diagonales sur une même ligne droite, sont semblables.*

Fig. 31. LES parallélogrammes GE* & DB, qui ont l'angle A de commun, & dont les diagonales AF & AC sont sur la même ligne droite AC, sont semblables.

Démonst. Puisque les parallélogrammes GE & DB ont un angle de commun [H],
N. 146. ils sont équiangles (n). Donc, l'angle AEF est égal à l'angle B; & par conséquent, les triangles AFE & ACB qui ont l'angle
N. 137. CAB de commun, sont semblables (n).

Or, puisque ces triangles sont sembla-
N. 413. bles, AE . AB :: EF . BC (n).

Ainsi, les parallélogrammes GE & DB sont équiangles; & les côtés qui y forment les angles égaux, sont proportionnels. Donc, ces parallélogrammes sont sembla-
N. 400. bles (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION

PROPOSITION XXV.

PROBLÊME.

450. *Décrire un polygone, qui ſoit ſemblable à un autre polygone donné, & égal à un troiſieme auſſi donné.*

IL faut décrire un polygone, qui ſoit ſemblable au polygone BCD *, & égal au polygone A. Fig. 32.

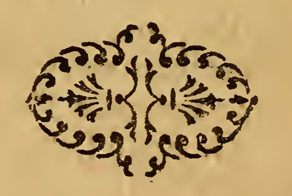
Conſt. Décrivez (n) ſur l'un des côtés du polygone BCD, par exemple ſur le côté BD, un rectangle BE, qui ſoit égal à ce polygone; & ſur l'un des côtés de ce rectangle, par exemple ſur le côté DE, un rectangle DH, qui ſoit égal au polygone A. Cherchez enſuite (n), une moyenne proportionnelle DI, entre les côtés BD & DG. Enfin (n), décrivez ſur cette moyenne, un polygone DKI, qui ſoit ſemblable au polygone BCD. Il ſera le polygone demandé. N. 167. N. 426. N. 435.

Démonſt. Les lignes BD, DI & DG ſont en proportion continue [c]. Ainſi, puiſque les polygones BCD & DKI ſont ſemblables [c], le premier eſt au ſecond, ce que BD eſt à DG (n). Or, le rectan- N. 440.

gle BE eſt auſſi au rectangle DH, ce que
N. 405. BD eſt à DG (n). Donc, le polygone
BCD eſt au polygone DKI, ce que le
N. 350. rectangle BE eſt au rectangle DH (n).
Ainſi, puiſque le premier polygone & le
premier rectangle ſont égaux [c], le dernier polygone & le dernier rectangle le
N. 369. ſont auſſi (n).

Mais, ce dernier rectangle eſt égal au
polygone A [c]. Donc, le dernier poly-
N. 62. gone eſt auſſi égal au polygone A (n).
D'ailleurs, ce même dernier polygone eſt
ſemblable au polygone BCD [c].

Par conſéquent, C. Q. F. F.



PROPOSITION XXVI.

* THÉORÊME.

451. *Chaque côté adjacent à l'angle droit d'un triangle rectangle, est moyen proportionnel entre la somme & la différence des deux autres côtés.*

LE côté, par exemple BC *, du triangle ABC qui est rectangle en C, est moyen proportionnel entre la somme BA+AC, & la différence BA — AC des deux autres côtés. Fig. 36.

Const. Du point A pris pour centre, & avec le côté AC pris pour rayon, décrivez le cercle X. Prolongez ensuite le côté BA, jusqu'à ce qu'il rencontre la circonférence à un point D.

Démonst. Des deux lignes droites BAD & BC, qui sont tirées du même point B hors du cercle X à la circonférence du même cercle, la premiere le coupe, & la seconde le touche (n). Ainsi BAD . BC N. 242.
: : BC . BE (n). Or, BAD est la somme des N. 434.
côtés BA & AC; & BE en est la différence [c].

Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXVII.

* THÉORÊME.

452. *Si du plus grand angle d'un triangle ſcalêne, on abaiſſe une perpendiculaire au côté oppoſé, la baſe & la différence des ſegmens de la baſe, ſont moyennes proportionnelles entre la ſomme & la différence des deux autres côtés.*

Fig. 37. LA ſomme AB * + BC des côtés AB & BC du triangle ſcalêne ABC, eſt à la baſe AC, ce que la différence AD—DC des ſegmens AD & DC de cette baſe, eſt à la différence AB—BC de ces côtés.

Conſt. Du point B pris pour centre, & avec le plus petit côté BC pris pour rayon, décrivez le cercle X. Prolongez enſuite le côté AB, jusqu'à ce qu'il rencontre la circonférence à un point E.

Démonſt. Les lignes ABE & AC ſont deux ſécantes tirées du même point A hors du cercle X à la circonférence du même cercle [c]. Ainſi, ABE . AC : :
N. 432. AG . AF (n). Or, ABE eſt la ſomme des côtés AB & BC ; AF en eſt la différence; & AG eſt celle des ſegmens AD & DC. Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXVIII.

** THÉORÊME.

453. *Si une ligne droite qui est perpendiculaire au diametre d'un cercle, rencontre une corde tirée de l'une quelconque des extrémités de ce diametre; ce même diametre, cette corde, & les parties de l'une & de l'autre qui ont un point de commun, sont réciproquement proportionnels.*

LA ligne droite DE* qui est perpendiculaire au diametre AB du cercle X, & rencontre au point E la corde AC, qui a le point A de commun avec ce diametre, donne cette proportion, AB . AC : : AE . AD. Fig. 38.

Const. Tirez du point B au point C, la ligne droite BC.

Démonst. Les triangles ACB & ADE qui sont rectangles l'un en C (n), & l'autre en D [H], ont l'angle A de commun. Ainsi, ils sont semblables; & par conséquent, AB . AC : : AE . AD (n). N. 263. N. 413.

Or, la même démonstration subsiste, à quelque point que la perpendiculaire DE rencontre la corde AC.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

454. Il ſuit de ce théorême, que *ſi pluſieurs cordes qui ſont tirées chacune de l'une quelconque des extrémités d'un même diametre, ſont coupées par une perpendiculaire à ce diametre; tous les rectangles faits chacun de chacune de ces cordes, & de la partie de cette corde qui a un point de commun avec ce même diametre, ſont égaux entr'eux.*

Fig. 39. Le rectangle de la corde AC* & de ſa partie AE, eſt égal à celui de la corde AG & de ſa partie AF.

Démonſt. Puiſque, AB . AC :: AE .
N. 453. AD (n), le rectangle des lignes AB & AD
N. 430. eſt égal à celui des lignes AC & AE (n). Or, par une raiſon pareille, ce même premier rectangle eſt auſſi égal à celui des lignes AG & AF. Donc, le rectangle des lignes AC & AE eſt égal à celui des lignes
N. 62. AG & AF (n).

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

455. Il ſuit de ce corollaire, & du théorême précédent, que *ſi une perpendiculaire au diametre d'un cercle eſt au milieu de ce diametre, le côté du quarré inſcrit*

dans ce cercle, eſt moyen proportionnel entre l'une quelconque des cordes qui ont un point de commun avec ce diametre, & la partie de cette corde compriſe entre ce point commun & cette perpendiculaire.

Dans le cercle X * où la perpendiculaire *d e* au diametre AB eſt au milieu de ce diametre, le côté du quarré qui y ſeroit inſcrit, eſt moyen proportionnel entre la corde, par exemple AC, & ſa partie A *e*. Fig. 39.

Conſt. Prolongez la perpendiculaire *de* juſqu'à ce qu'elle rencontre la circonférence à un point H. Tirez enſuite du point A au point H, la ligne droite AH.

Démonſt. Le rectangle de la corde AC & de ſa partie A *e*, eſt égal à celui du diametre AB & du rayon A *d* (n). Or, N. 454.
ce dernier rectangle eſt double du quarré du rayon A *d* (n). N. 405.

Mais, le quarré de la ligne AH, laquelle eſt le côté du quarré qui ſeroit inſcrit dans le cercle X (n), eſt auſſi double N. 290.
du quarré du même rayon A *d* (n). Donc, N. 171.
le rectangle de la corde AC & de la partie A*e*, eſt égal au quarré du côté AH (n). N. 67.
Par conſéquent, AC . AH : : AH . A *e* (n). N. 433.

Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXIX.

** THÉORÊME.

456. *Si après avoir décrit un demi-cercle sur l'une quelconque de deux cordes qui s'entrecoupent dans un cercle, on éleve du point d'interſection une ordonnée au diametre de ce demi-cercle, cette ordonnée eſt moyenne proportionnelle entre les deux parties de chacune de ces cordes.*

Fig. 40. L'ORDONNÉE EF* au diametre CD du demi-cercle CFD, eſt moyenne proportionnelle entre les parties AE & EB de la corde AB du cercle ABD.

Démonſt. Puiſque les cordes AB & CD s'entrecoupent au point E, le rectangle des parties AE & EB de la premiere, eſt égal à celui des parties CE & ED de la
N. 268. ſeconde (n). Or, le rectangle de ces parties CE & ED, eſt égal au quarré de
N. 268. l'ordonnée EF (n). Donc, le rectangle des parties AE & EB, eſt égal au quarré
N. 62. de l'ordonnée EF (n). Par conſéquent,
N. 433. AE . EF : : EF . EB (n).

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

457. Il ſuit de ce théorême, que *ſi les cordes dont il s'agit, s'entrecoupent perpendiculairement, alors la partie EF* * Fig. 41. *de la corde AB, eſt moyenne proportionnelle entre ſes deux autres parties AE & EB.*

PROPOSITION XXX.

PROBLÊME.

458. *Diviſer en moyenne & extrême raiſon une ligne droite donnée.*

Il faut diviſer la ligne droite AB *, en Fig. 33. moyenne & extrême raiſon.

Conſt. Diviſez (n) la ligne AB en deux N. 203. parties, qui ſoient telles que le rectangle de cette ligne & de la plus petite partie CB, ſoit égal au quarré de la plus grande AC. Elle ſera diviſée comme il eſt demandé.

Démonſt. Le rectangle des lignes AB & CB eſt égal au quarré de la ligne AC [c]. Ainſi, ∸ AB . AC . CB (n). N. 433.

Par conſéquent, C. Q. F. F.



PROPOSITION XXXI.

THÉORÊME.

459. *Si des polygones qui ſont décrits ſur les côtés d'un triangle rectangle ſont ſemblables, & ſemblablement poſés ſur ces côtés; celui qui eſt ſur l'hypothénuſe eſt égal à la ſomme des deux autres.*

Fig. 34. SI les polygones X*, Y & Z, qui ſont décrits ſur les côtés du triangle rectangle ABC, ſont ſemblables, & ſemblablement poſés ſur ces côtés; le polygone X, qui eſt ſur l'hypothénuſe AC, eſt égal à la ſomme des polygones Y & Z qui ſont ſur les autres côtés.

Conſt. Du point B, abaiſſez la perpen-
N. 96. diculaire BD à l'hypothénuſe AC (n).

Démonſt. Les triangles ABC & ADB
N. 420. ſont ſemblables (n). Donc, ∺ AC. AB.
N. 413. AD (n). Ainſi, puiſque les polygones X & Y ſont auſſi ſemblables [H], le polygone X eſt au polygone Y, ce que AC eſt à
N. 440. AD (n). Par conſéquent, en renverſant, le polygone Y eſt au polygone X, ce que
N. 372. AD eſt à AC (n).

Pareillement, les triangles ABC &

& CDB font femblables (n). Donc, ∺ N. 420.
AC . BC . DC (n). Ainfi, puifque les N. 413.
polygones X & Z font auffi femblables
[H], le polygone X eft au polygone Z,
ce que AC eft à DC (n). Par conféquent, N. 440.
en renverfant, le polygone Z eft au polygone X, ce que DC eft à AC (n). N. 372.

Ainfi, les fix quantités Y, X, AD, AC, Z & DC, font telles que les quatre premieres font proportionnelles; & que la cinquieme, la feconde, la fixieme & la quatrieme, le font auffi. Donc, la fomme Y+Z de la premiere & de la cinquieme, eft à la feconde X, ce que la fomme AD +DC de la troifieme & de la fixieme,
eft à la quatrieme AC (n). Par conféquent, N. 390.
puifque cette derniere fomme AD+DC, eft égale à AC, la premiere Y+Z eft
égale à X (n). N. 369.

Donc, C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXII.

THÉORÊME.

460. *Dans les cercles égaux, les ſecteurs ſont entr'eux, comme les arcs qui les terminent.*

Fig. 35. DANS les cercles égaux B* & E, le ſecteur ABC eſt au ſecteur DEF, ce que l'arc AHC eſt à l'arc DMF.

N. 262. *Conſt.* Diviſez (n) le plus petit AC des deux arcs AC & DF, en tel nombre de parties égales qu'il vous plaira ; par exemple, en quatre parties égales AG, GH, &c. Prenez ſur l'arc DF, une partie DK égale à la partie AG. Enfin, tirez du centre B aux points G, H, &c. les rayons BG, BH, &c ; & du centre E au point K, le rayon EK.

Démonſt. Les ſecteurs ABG, GBH,
N. 37. HBI, IBC & DEK, ſont égaux (n). Ainſi, l'on démontre que le ſecteur ABC eſt au ſecteur DEF, ce que l'arc AHC eſt à l'arc DMF, par un raiſonnement tout pareil à celui dont on s'eſt ſervi au n° 405, pour démontrer que les parallélo-

grammes dont les hauteurs ſont égales, ſont entr'eux comme leurs baſes.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

461. Il ſuit de ce théorême, que *le ſecteur eſt au cercle, ce que l'arc du ſecteur eſt à la circonférence du cercle.*

PROPOSITION XXXIII.

** THÉORÊME.

462. *Si de deux points pris à volonté ſur l'arc qui termine un quart de cercle, mais cependant également éloignés chacun du milieu de cet arc, on abaiſſe des perpendiculaires au rayon; le quadrilatere compris entre ces perpendiculaires eſt au cercle, ce que l'arc qui termine ce quadrilatere eſt à la circonférence du cercle.*

LE quadrilatere ABCD* compris entre les lignes droites AD & BC qui ſont perpendiculaires chacune au rayon EK, & rencontrent l'arc AIB aux points A & B également éloignés chacun de ſon milieu I, eſt au cercle, ce que ce même arc AIB eſt à la circonférence du cercle. Fig. 42.

Conſt. Tirez du centre E aux points A & B, les rayons EA & EB.

Démonſt. L'arc BK eſt égal à l'arc LA [H]. Ainſi, l'angle BEK eſt égal à
N. 37. l'angle LEA (n). Or, l'angle LEA eſt
N. 130. égal à l'angle EAD (n); puiſque les lignes
N. 129. LE & AD ſont paralleles (n). Donc, les
N. 62. angles BEK & EAD ſont égaux (n).

Ainſi, dans les triangles ECB & ADE qui ſont rectangles l'un en C, & l'autre en D [C], les angles BEK & EAD ſont égaux, de même que les côtés EB & EA
N. 35. (n). Donc, ces triangles ſont égaux (n).
N. 123. Par conſéquent, ſi du même quadrilatere ABCE on retranche le premier de ces deux triangles, ou ſi l'on en retranche le dernier, les reſtes ſeront égaux.

Or, ces reſtes ſont, dans le premier cas, le ſecteur AEB; & dans le ſecond, le quadrilatere ABCD. Donc, ce ſecteur & ce
N. 64. quadrilatere ſont égaux (n).

Mais, ce ſecteur eſt au cercle, ce que l'arc AIB eſt à la circonférence du cercle
N. 461. (n). Donc, le quadrilatere ABCD eſt auſſi au cercle, ce que ce même arc AIB eſt à la même circonférence.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

463. Il ſuit de ce théorême, que *ſi l'on prolonge juſqu'à la circonférence les perpendiculaires AD* & BC, la bande ABFG eſt au cercle, ce que l'arc AIB eſt à la demi-circonférence.* Fig. 42.

COROLLAIRE II.

464. Il ſuit auſſi de ce même théorême, que *les bandes telles que ABCD*, EFGH, &c. ſont entr'elles, comme les arcs AIB, EIF, &c. qui les terminent de l'un de leurs côtés.* Fig. 43.

COROLLAIRE III.

465. Enfin, il ſuit de ce corollaire, que *ſi après avoir diviſé en un même nombre de parties égales chacun des arcs égaux IE* & IF, on tire par chaque point de diviſion des paralleles à la corde IK, les bandes, telles que ED, AK, IC & BG qui en réſultent, ſont en proportion arithmétique.* Fig. 43.

Démonſt. Si chacun des arcs IE & IF eſt diviſé, par exemple en deux parties égales, la bande EG eſt double de la bande AC (n). Ainſi, la ſomme des bandes ED & BG eſt égale à celle des bandes N. 464.

AK & IC. Par conſéquent, ces quatre bandes ſont en proportion arithmétique.

Et ſi les arcs IE & IF ſont diviſés chacun en un plus grand nombre de parties égales, on démontre, par un raiſonnement ſemblable au précédent, que toutes les bandes qui réſultent de cette diviſion, priſes deux à deux, l'une au-deſſous & l'autre au-deſſus de la corde IK, & également éloignées chacune de cette corde, forment entr'elles des ſommes égales. Donc, ces bandes ſont toujours en proportion arithmétique.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

USAGE.

On peut ſe ſervir de cette propoſition, de la maniere ſuivante, pour réſoudre ce problême.

Fig. 44. Couper d'un cercle X * une bande, qui en ſoit, par exemple, la cinquieme partie.

SOLUTION. Tirez un diametre AB, à
N. 261. *volonté. Diviſez* (n) *en deux parties égales AI & IC le quart AC de la circonférence. Prenez de part & d'autre du point I les arcs ID & IE; chacun de 18 degrés, parce que 36 eſt la dixieme partie de 360. Enfin,*
N. 133. *des points D & E, tirez* (n) *les paralleles DG & EF au diametre AB. Le quadrilatere*

DF que ces paralleles forment avec les arcs DE & FG, eſt (n) *la bande demandée.* N. 463.

PROPOSITION XXXIV.

* THÉORÊME.

466. *Le rectangle des diagonales d'un quadrilatere quelconque inſcrit dans un cercle, eſt égal à la ſomme des deux rectangles faits chacun des côtés oppoſés de ce même quadrilatere.*

LE rectangle des diagonales AC* & BD Fig. 45.
du quadrilatere ABCD inſcrit dans le cercle X, eſt égal à la ſomme des rectangles faits, l'un des côtés AB & DC, & l'autre, des côtés AD & BC.

Conſt. Faites (n) ſur le côté AB, l'angle N. 119.
ABE égal à l'angle DBC.

Démonſt. Dans les triangles ABE & DBC, les angles ABE & DBC ſont égaux [c], & les angles BAC & BDC le ſont auſſi (n); puiſqu'ils ſont chacun dans N. 250.
le même ſegment BADC. Ainſi, ces deux triangles ſont équiangles. Donc, AB . BD : : AE . DC (n); & par conſéquent, N. 413.
le rectangle des lignes AB & DC eſt égal à celui des lignes BD & AE (n). N. 430.

Pareillement, dans les triangles EBC & ABD, les angles EBC & ABD ſont égaux; puiſque la partie DBC du premier eſt égale à la partie ABE du ſecond [c], & que la partie EBD leur eſt commune: & les angles BCA & BDA ſont auſſi
N. 250. égaux (n), puiſqu'ils ſont chacun dans le même ſegment BCDA. Ainſi, ces deux triangles ſont auſſi équiangles. Donc, BC.
N. 413. BD : : EC . AD (n) ; & par conſéquent, le rectangle des lignes AD & BC eſt égal
N. 430. à celui des lignes BD & EC (n).

Donc, la ſomme des rectangles faits, l'un des lignes BD & AE, & l'autre, des lignes BD & EC, eſt égale à celle des rectangles faits, l'un des côtés AB & DC, & l'autre, des côtés AD & BC. Mais, cette premiere ſomme eſt la même choſe que le rectangle des diagonales AC & BD
N. 181. (n) ; puiſque les lignes AE & EC ſont toutes les parties de la diagonale AC. Donc, le rectangle des diagonales AC & BD, eſt égal à la ſomme des rectangles faits, l'un des côtés AB & DC, & l'autre, des côtés AD & BC.

Par conſéquent, C. Q. F. D.





LES ÉLÉMENS D'EUCLIDE.

LIVRE ONZIEME †.

Les principes des lignes & des surfaces ont été établis dans les Livres précédens ; ainsi, il ne reste plus à parler que de ceux des solides. Mais, il est nécessaire de considérer auparavant, les différentes positions que les lignes droites & les plans peuvent avoir à l'égard d'autres plans. Cet objet seroit celui du onzieme Livre d'Euclide, si

† Nous supprimons le septieme Livre, le huitieme & le neuvieme, parce que ces trois Livres ne traitent que de certaines propriétés des nombres, qui sont assez inutiles. Nous faisons la même chose à l'égard du dixieme, parce qu'il ne considere les quantités, que pour déterminer celles qui sont *incommensurables ;* c'est-à-dire, celles qui, relativement à d'autres, ne peuvent point être exprimées par des nombres.

les personnes qui ont rassemblé les écrits de ce Géometre, n'avoient pas confondu ce Livre avec le douzieme, qui traite des solides; de maniere que de 14 Livres d'Elémens, elles n'en ont fait que 13. Cette faute est irréparable, à cause du grand nombre d'Auteurs qui citent cet ouvrage. Ainsi, tout ce que nous avons pu faire, a été de ne point interrompre l'ordre des propositions : mais de diviser ce onzieme Livre en deux parties, dont la premiere comprend le onzieme d'Euclide; & la seconde, ce qui auroit dû faire le douzieme.

Au reste, cette premiere partie est absolument nécessaire, pour la Trigonométrie sphérique, la Gnomonique, l'Astronomie, les Sections coniques, la Coupe des pierres, &c; & la derniere, pour le Mesurage des solides.



DÉFINITIONS.

467. ON nomme *corps* ou *ſolide*, ce qui eſt étendu en trois ſens.

COROLLAIRE.

468. *Il ſuit de cette définition, que* les extrémités d'un corps ſont des ſurfaces.

Démonſt. *Les extrémités d'un corps ne ſont point étendues en trois ſens, puiſque ſi elles l'étoient, elles ſeroient des corps* (n). *Or, ſi les extrémités d'un corps* N. 467. *étoient des corps, elles auroient d'autres corps pour extrémités. Par conſéquent, elles ne ſeroient point celles de ce premier corps; mais, ce ſeroient ces autres corps qui le ſeroient.*

Elles ne ſont point non plus étendues ſeulement en un ſens. Car, puiſque les corps ſont étendus en trois ſens (n), *il faut* N. 467. *néceſſairement que ce qui termine les corps, termine deux de ces ſens. Or, ce qui n'eſt étendu qu'en un ſens, ne peut point en terminer deux.*

Cependant, les extrémités d'un corps ſont étendues. Donc, elles ne le ſont qu'en

deux ſens ; & par conſéquent, elles ſont
N. 9. *des ſurfaces* (n).

Donc, C. Q. F. D.

469. On dit d'une ligne droite, qu'elle *eſt dans un plan*, lorſque toutes ſes parties ſont dans ce plan, prolongé s'il eſt néceſſaire.

Fig. 1. *Les lignes droites CD * & EF*, ſont dans le plan X.

470. On dit de deux lignes droites, qu'elles *ſont dans le même plan*, lorſque l'on peut concevoir un plan, dans lequel ces deux lignes ſeroient en même tems.

471. On dit de deux plans, qu'ils *ſont dans le même plan*, lorſqu'étant prolongés, ils ſe rencontreroient de maniere qu'ils ne formeroient plus qu'un ſeul plan.

472. Enfin, on nomme *commune ſection* de deux plans, une ligne qui eſt commune à ces deux plans.

Fig. 2. *La ligne AB *, qui eſt en même tems dans le plan X & dans le plan Y, eſt la* commune ſection *de ces deux plans.*

473. On dit d'une ligne droite, qu'elle eſt perpendiculaire à un plan, lorſqu'elle l'eſt à toutes les lignes de ce plan, avec

lesquelles elle peut avoir un point de commun.

La ligne AB est* perpendiculaire *au plan X; si elle l'est aux lignes CD, EF, &c. qui sont dans ce plan, & avec lesquelles elle a le point B de commun.* Fig. 1.

474. On dit d'une ligne droite, qu'elle est *inclinée* à un plan, lorsqu'elle formeroit un angle aigu, avec une autre ligne droite qui seroit tirée du point auquel cette premiere ligne rencontre ce plan, au point auquel une perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de cette même premiere ligne à ce même plan, le rencontreroit.

La ligne droite AB est* inclinée *au plan X; parce qu'elle forme un angle aigu ABC* †, *avec la ligne BC qui est tirée du point B au point C, auquel la perpendiculaire AC rencontre ce plan.* Fig. 3.

475. On dit d'un plan, qu'il est *perpendiculaire* à un autre, lorsque les lignes droites qui sont tirées dans l'un de ces plans, perpendiculairement à leur commune section, sont aussi perpendiculaires à l'autre plan.

Le plan Y est* perpendiculaire *au plan X; parce que les lignes droites CD, EF,* Fig. 2.

† L'angle aigu ABC* s'appelle l'*inclinaison* de la ligne AB au plan X. Fig. 3.

&c. qui ſont tirées dans le plan Y perpendiculairement à la commune ſection AB, ſont auſſi perpendiculaires au plan X.

476. On dit d'un plan, qu'il eſt *incliné* à un autre, lorſque les lignes droites qui ſeroient tirées chacune dans chacun de ces plans, d'un même point de leur commune ſection, & perpendiculairement à leur commune ſection, formeroient des angles aigus.

Fig. 4. *Le plan Y* eſt* incliné *au plan X; parce que les lignes droites BA & BC qui ſont tirées, l'une dans le plan Y, & l'autre dans le plan X, perpendiculairement à la commune ſection ED, forment un angle aigu ABC* †.

477. On dit que des plans ſont *également*, ou *ſemblablement* inclinés à d'autres plans, chacun à chacun, lorſque leurs inclinaiſons ſont égales.

478. On dit que des plans ſont *paralleles*, lorſque tous les points des uns ſont également éloignés de tous les points correſpondans des autres.

Fig. 4. † L'angle aigu ABC*, s'appelle l'*inclinaiſon* du plan Y au plan X.

COROLLAIRE.

COROLLAIRE.

479. *Il ſuit de cette définition, que* des plans paralleles ne ſe rencontrent point.

480. On dit que des ſolides ſont *ſemblables*, lorſqu'ils ſont terminés par un pareil nombre de ſurfaces, ſemblables chacune à chacune.

481. On dit que des ſolides ſont *ſemblables & égaux*, lorſqu'ils ſont terminés par un pareil nombre de ſurfaces, ſemblables & égales, chacune à chacune.

482. Enfin, on dit que des ſolides ſont *égaux*, lorſqu'ils contiennent des eſpaces égaux.

483. On nomme *angle ſolide*, un angle formé par plus de deux angles plans, qui ont chacun le même point pour ſommet; & ne ſont point dans le même plan.

L'angle A qui eſt formé par les angles* Fig. 5.
plans EAD, DAC, &c. qui ont chacun le même point A pour ſommet, & ne ſont point dans le même plan, eſt un angle ſolide.

484. On nomme *Pyramide*, un ſolide terminé par plus de deux plans triangulaires, qui ont chacun le même point pour

ſommet ; & dont les côtés qui ſont oppoſés à ce ſommet , ſont chacun dans le même plan.

Fig. 6. *Le ſolide ABCD* * *qui eſt formé par les triangles ABD, DBC & ABC, qui ont chacun le même point B pour ſommet, & dont les côtés AD , DC & AC, ſont chacun dans le même plan ADC* †, *eſt une* pyramide.

485. On nomme *pyramides triangulaires*, celles dont les baſes ſont des triangles : *pyramides quadrilateres*, celles dont les baſes ſont des quadrilateres : *pyramides pentagones*, celles dont les baſes ſont des pentagones, & ainſi de ſuite.

486. On nomme *Priſme*, un ſolide qui eſt terminé de deux côtés par deux plans quelconques, égaux, ſemblables & paralleles ; & de chaque autre côté, par un parallélogramme.

Fig. 7. *Le ſolide X* * *qui eſt terminé de deux côtés par les exagones CF & LI* ¶, *égaux, ſemblables & paralleles ; & de chaque autre côté, par les parallélogrammes AG, HF, IE, &c. eſt un* priſme.

487. On nomme *priſmes triangulaires*,

† Ce plan s'appelle la *baſe* de la pyramide.

¶ Ces deux plans s'appellent les baſes du priſme.

ceux dont les bafes font des triangles : *prifmes quadrilateres*, ceux dont les bafes font des quadrilateres : *prifmes pentagones*, ceux dont les bafes font des pentagones ; & ainfi de fuite.

488. On nomme *Sphere*, un folide qui eft terminé par une feule furface, dont tous les points font également éloignés d'un certain point de ce folide.

Le folide X eft une* fphere. Fig. 8.

489. On nomme *Centre* d'une fphere, le point qui eft également éloigné de tous les points de la furface de cette fphere.

Le point C eft le* centre *de la fphere X.* Fig. 8.

490. On nomme *Diametre* d'une fphere, une ligne droite quelconque qui paffe par le centre de cette fphere, & eft terminée de part & d'autre à fa furface.

La ligne AB eft un* diametre *de la* Fig. 8.
fphere X.

491. On nomme *Rayon* d'une fphere, une ligne droite quelconque qui eft tirée du centre de cette fphere à fa furface.

La ligne CB eft un* rayon *de la fphere* Fig. 8.
X.

492. On nomme *Axe* d'une fphere,

un diametre fixe de cette ſphere, ſur lequel elle tourne.

Fig. 8. *Le diametre AB* eſt l'axe de la ſphere X, ſi ce diametre étant immobile à l'égard de cette ſphere, elle tourne ſur lui.*

493. Lorſqu'une ſphere eſt coupée par un plan, la ſection eſt un cercle. Or, ce cercle ſe nomme *grand cercle*, lorſque le plan coupant paſſe par le centre de la ſphere; & *petit cercle*, lorſqu'il n'y paſſe point.

494. On nomme *Cône*, une eſpece de pyramide, dont la baſe eſt un cercle.

Fig. 9. *Le ſolide ABCD* eſt un* cône.

495. On nomme *Axe* d'un cône, une ligne droite qui eſt tirée du ſommet de ce cône, au centre de ſa baſe.

Fig. 9. *La ligne BE* eſt l'axe du cône ABCD.*

496. On nomme *Cône droit*, celui dont l'axe eſt perpendiculaire à la baſe; & *Cône incliné*, celui dont l'axe eſt incliné à la baſe.

497. On nomme *Cylindre*, une eſpece de priſme, dont les baſes ſont des cercles égaux & paralleles.

Fig. 10. *Le ſolide X* eſt un* cylindre.

498. On nomme *Axe* d'un cylindre, une ligne droite qui eſt tirée du centre de la baſe ſupérieure de ce cylindre, au centre de ſa baſe inférieure.

La ligne GH eſt l'*axe *du cylindre X.* Fig. 10.

499. On nomme *Cylindre droit*, celui dont l'axe eſt perpendiculaire à la baſe ; & *Cylindre incliné*, celui dont l'axe eſt incliné à la baſe.

500. On dit que des cônes ſont *semblables*, lorſque leurs axes ſont proportionnels aux diametres de leurs baſes ; & il en eſt de même des cylindres.

501. On nomme *Exaëdre*, ou *Cube*, un priſme qui eſt terminé par ſix quarrés.

502. On nomme *Tétraëdre*, une pyramide qui eſt terminée par quatre triangles équilatéraux & égaux.

503. On nomme *Octaëdre*, un ſolide qui eſt terminé par huit triangles équilatéraux & égaux.

504. On nomme *Dodécaëdre*, un ſolide qui eſt terminé par douze pentagones réguliers & égaux.

505. On nomme *Icoſaëdre*, un ſolide

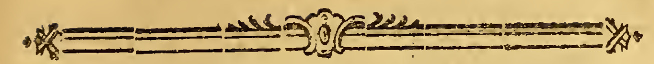
qui eſt terminé par vingt triangles équilatéraux & égaux.

Il eſt impoſſible qu'il y ait des corps réguliers qui ſoient différens de la ſphere, ou de ces cinq derniers ſolides.

506. Enfin, on nomme *Parallélépipede*, un ſolide qui eſt terminé par ſix plans paralleles.

507. On dit d'un ſolide, qu'il eſt *inſcrit* dans un autre, lorſqu'il a tous ſes angles dans la ſurface de cet autre : & qu'il eſt *circonſcrit* à un autre, lorſque ſa ſurface touche tous les angles de cet autre.





PREMIERE PARTIE.
DES PLANS.

PROPOSITION I.

THÉORÊME.

508. *Toutes les parties d'une ligne droite ſont dans le même plan.*

UNE ligne droite AB * dans le plan X, & une ligne droite BC hors de ce plan, ne ſont point une ſeule ligne droite. Fig. 11.

Conſt. Du même point B élevez dans le plan X (n), la perpendiculaire BE à la ligne AB ; & la perpendiculaire BD à la ligne BE. N. 95.

Démonſt. La ſomme des angles EBA & EBD, eſt égale à celle de deux angles droits. Ainſi, les lignes AB & BD, qui ſont tirées du même point B de la ligne droite BE, ne ſont qu'une ſeule ligne droite ABD (n). N. 100.

Par conſéquent, les lignes AB & BC, ne ſont point une ſeule ligne droite.

Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION II.

THÉORÊME.

509. *Deux lignes droites qui ont un point de commun, ſont dans le même plan.*

Fig. 12. LES lignes droites AB * & CD qui ont le point E de commun, ſont dans le même plan.

Conſt. Du point A pris à volonté ſur la ligne AB, tirez à un point quelconque D de la ligne CD, une ligne droite AD.

Démonſt. La partie AE de la ligne AB eſt dans le plan du triangle AED, puiſqu'elle eſt l'un des côtés de ce triangle; & par une raiſon pareille, la partie DE de la ligne CD eſt auſſi dans le même plan. Ainſi, les lignes AB & CD ont chacune une partie dans le même plan.

N. 508. Par conſéquent, elles y ſont auſſi (n). Donc, C. Q. F. D.



PROPOSITION III.

THÉORÊME.

510. *La commune ſection de deux plans, eſt une ligne droite.*

LA commune ſection AB * des plans CD & EF, eſt une ligne droite. Fig. 13.

Démonſt. Si la ligne AB, dont les extrémités A & B ſont dans les plans CD & EF [H], ſe courboit entre ces extrémités, ou vers E, ou vers F, elle ſortiroit du plan CD; ſi elle ſe courboit, ou vers C, ou vers D, elle ſortiroit du plan EF; & ſi elle ſe courboit vers tout autre côté, elle ſortiroit en même temps & du plan CD, & du plan EF. Or, dans tous ces cas, elle ne feroit plus la commune ſection de ces deux plans (n). N. 472.

Donc, puiſqu'elle eſt cette commune ſection [H], elle va directement du point A au point B; & par conſéquent, elle eſt une ligne droite (n). N. 7.

Donc, C. Q. F. D.



PROPOSITION IV.

THÉORÊME.

511. *Si de trois lignes droites qui ont un point de commun, l'une est perpendiculaire aux deux autres, elle l'est aussi à leur plan.*

Fig. 14. LA ligne droite AB * qui est perpendiculaire aux lignes droites CD & EF, avec lesquelles elle a le point B de commun, l'est aussi à leur plan X.

Const. Du point B, pris pour centre, & avec tel rayon qu'il vous plaira, prenez sur les lignes CD & EF, les parties égales BC, BE, BD & BF. Tirez du point C au point E, la ligne droite CE; & du point F au point D, la ligne droite FD. Par le point B, tirez dans le plan X, une ligne droite quelconque GH, qui rencontre les précédentes CE & FD, à deux points quelconques G & H. Enfin, tirez du point A aux points C, G, E, D, H & F, les lignes droites AC, AG, AE, AD, AH & AF.

Démonst. Premiérement. Dans les triangles ABC, ABE, ABD & ABF,

qui font tous rectangles en B [H], les côtés BC, BE, BD & BF, font égaux [C], & le côté AB eft commun. Ainfi, les côtés AC, AE, AD & AF, font auffi égaux (n). N. 82.

Secondement. Dans les triangles EBC & DBF, l'angle EBC eft égal à l'angle DBF (n); & les côtés BC & BE font N. 101.
égaux aux côtés BD & BF, chacun à chacun [C]. Ainfi, le côté CE eft égal au côté FD, & l'angle BCE à l'angle BDF (n). N. 82.

Troifiémement. Dans les triangles GBC & HBD, le côté BC eft égal au côté BD [C], l'angle BCE à l'angle BDF [D], & l'angle CBG à l'angle DBH (n). Ainfi, N. 101.
le côté CG eft égal au côté DH, & le côté BG au côté BH (n). N. 123.

Quatriémement. Dans les triangles ACE & ADF, le côté AC eft égal au côté AD [D], le côté AE au côté AF [D], & le côté CE au côté FD [D]. Ainfi, l'angle ACE eft égal à l'angle ADF (n). N. 88.

Cinquiémement. Dans les triangles ACG & ADH, l'angle ACE eft égal à l'angle ADF [D], le côté AC au côté AD [D], & le côté CG au côté DH [D]. Ainfi, le côté AG eft égal au côté AH (n). N. 82.

Sixiémement. Enfin, dans les triangles ABG & ABH, le côté AG eſt égal au côté AH [D], le côté BG au côté BH [D], & le côté AB eſt commun. Ainſi,
N. 88. l'angle ABG eſt égal à l'angle ABH (n). Par conſéquent, la ligne AB eſt perpendi-
N. 19. culaire à la ligne GH (n).

Or, la même démonſtration ſubſiſte, en quelque endroit du plan X que l'on tire la ligne GH, pourvu qu'elle paſſe par le point B. Donc, la ligne AB eſt perpendiculaire à toutes les lignes de ce plan, avec leſquelles elle peut avoir un point de commun. Par conſéquent, elle l'eſt auſſi
N. 473. à ce même plan (n).

Donc, C. Q. F. D.



PROPOSITION V.

THÉORÊME.

512. *Si de quatre lignes droites qui ont un point de commun, l'une eſt perpendiculaire aux trois autres, ces trois dernieres ſont chacune dans le même plan.*

SI la ligne droite AB* eſt perpendiculaire aux lignes droites BC, BD & BE, avec leſquelles elle a le point B de commun, ces trois dernieres lignes ſont chacune dans le même plan. Fig. 15.

Démonſt. Puiſque les lignes BC & BD ont le point B de commun [H], elles ſont dans un même plan X (n). Ainſi, ſi la ligne BE eſt la commune ſection de ce plan & d'un autre plan quelconque, les lignes BC, BD & BE, ſont chacune dans un même plan; puiſqu'alors cette ligne BE ſera auſſi dans le plan X (n). N. 509. N. 472.

Or, la ligne BE eſt la commune ſection de ce dernier plan & du plan Y, qui eſt celui des lignes AB & BE (n). Car, puiſque la ligne AB eſt perpendiculaire aux lignes BC & BD [H], elle l'eſt auſſi au plan X de ces lignes (n); & par con- N. 509. N. 511.

féquent, à toutes les lignes de ce plan, avec lefquelles elle peut avoir un point
N. 473. de commun (n). Or, elle a néceffairement le point B de commun avec la commune fection de ce même plan & du plan Y. Donc, elle eft perpendiculaire à cette commune fection.

Mais, de toutes les lignes droites que l'on peut tirer du point B, dans le plan Y, la ligne BE eft la feule à laquelle cette ligne AB puiffe être perpendiculaire; puifqu'elle l'eft à cette derniere ligne [H], & que d'un même point on ne peut élever dans un même plan, qu'une feule perpendiculaire à une même ligne droite. Donc, cette ligne BE eft la commune fection du plan X & du plan Y.

Par conféquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION VI.

THÉORÊME.

513. *Deux lignes droites qui ſont perpendiculaires chacune au même plan, ſont paralleles.*

LES lignes droites AB* & CD qui ſont perpendiculaires chacune au plan X, ſont paralleles. Fig. 16.

Conſt. Tirez du point B au point D, la ligne droite BD. Du point D, élevez dans le plan X (n), la perpendiculaire ED à cette ligne BD. Faites cette perpendiculaire égale à la ligne AB. Enfin, tirez du point B au point E, la ligne droite BE; & du point A aux points E & D, les lignes droites AE & AD. N. 95.

Démonſt. Les lignes AB & CD ſont perpendiculaires chacune à la ligne BD (n); puiſqu'elles le ſont chacune au plan X [H]. Ainſi, ſi elles ſont chacune dans le même plan, elles ſont paralleles (n). N. 473. N. 129.

Or, ces lignes ſont chacune dans le même plan. Car, les triangles ABD & EDB ſont rectangles, l'un en B (n), & l'autre en D [C]; ils ont le côté AB égal N. 473.

au côté ED [C]; & le côté BD leur eſt commun. Donc, le côté AD eſt égal au
N. 82. côté BE (n).

Ainſi, dans les triangles ADE & ABE, le côté AD eſt égal au côté BE [D], le côté ED au côté AB [C], & le côté AE eſt commun. Donc, l'angle ADE eſt égal
N. 88. à l'angle ABE (n). Par conſéquent, puiſ-
N. 473. que ce dernier angle eſt droit (n), l'angle ADE l'eſt auſſi.

Ainſi, la ligne ED eſt perpendiculaire à la ligne AD [D], à la ligne BD [C], &
N. 473. à la ligne CD (n). Donc, cette ligne CD eſt dans le même plan que les lignes
N. 512. AD & BD (n). Or, la ligne AB y eſt auſſi; puiſqu'elle eſt l'un des côtés du triangle ADB, dont ces lignes AD & BD ſont les autres côtés. Donc, les lignes AB & CD ſont chacune dans le même plan.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

514. Il ſuit de la démonſtration de ce théorême, que *ſi deux lignes droites ſont paralleles, elles ſont chacune dans le même plan.*

PROPOSITION VII.

THÉORÊME.

515. *Une ligne droite qui en rencontre deux autres qui ſont paralleles, eſt dans le même plan que ces dernieres.*

LA ligne droite EF*, qui rencontre aux points E & F les lignes droites & paralleles AB & CD, eſt dans le même plan que ces paralleles. Fig. 17.

Démonſt. Si l'on ſuppoſe que le plan des paralleles AB & CD ſoit coupé par un autre plan quelconque qui paſſe par les points E & F, la commune ſection de ces deux plans y paſſera auſſi. Ainſi, ces deux points ſeront communs & à cette commune ſection, & à la ligne droite EF. Mais, cette même commune ſection ſera auſſi une ligne droite (n). Donc, la ligne droite EF eſt cette commune ſection (n). N. 510. N. 74.

Or, puiſque la ligne EF eſt la commune ſection du plan des paralleles AB & CD & d'un certain autre plan, elle eſt dans le même plan que ces paralleles (n). N. 472.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION VIII.

THÉORÊME.

516. *Si de deux lignes droites qui ſont paralleles, l'une eſt perpendiculaire à un plan, l'autre eſt auſſi perpendiculaire au même plan.*

Fig. 16. Si la ligne droite AB*, qui eſt parallele à la ligne CD, eſt perpendiculaire au plan X, la ligne CD eſt auſſi perpendiculaire au même plan X.

Conſt. La même que celle du nº 513.

Démonſt. Les lignes DA & DB rencontrent les lignes AB & CD [c], qui ſont paralleles [H]. Ainſi, ces quatre li-
N. 515. gnes ſont chacune dans le même plan (n). Or, la ligne ED eſt perpendiculaire à ce
N. 511. plan (n); puiſqu'elle l'eſt & à la ligne DB [c], & à la ligne DA, par une démonſtration pareille à celle du nº 513. Donc, elle eſt auſſi perpendiculaire à la
N. 473. ligne CD (n).

Mais la ligne BD eſt auſſi perpendicu-
N. 131. laire à cette même ligne CD (n). Donc, cette ligne CD eſt perpendiculaire au plan
N. 511. X (n).

Par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION IX.

THÉORÊME.

517. *Deux lignes droites qui ſont paralleles chacune à une même ligne, le ſont auſſi entr'elles, quand même elles ne ſeroient point dans le même plan que cette derniere.*

LES lignes droites AB * & CD, qui ne ſont point dans le même plan que la ligne EF †, mais qui ſont paralleles chacune à cette derniere ligne, le ſont auſſi entr'elles. Fig. 18.

Conſt. Du point G, pris à volonté ſur la ligne EF, abaiſſez (n) une perpendiculaire GH à la ligne AB; & une perpendiculaire GI à la ligne CD. N. 96.

Démonſt. La ligne EF eſt perpendiculaire & à la ligne GH, & à la ligne GI (n). Ainſi, elle l'eſt auſſi au plan de ces lignes (n). Mais, les lignes AB & CD ſont paralleles chacune à cette ligne EF [H]. Donc, elles ſont auſſi perpendicu- N. 131. N. 511.

† Si les trois lignes propoſées étoient dans le même plan, cette propoſition ſeroit la même que celle du n° 132.

N. 516. laires chacune à ce même plan (n). Par conséquent, elles sont aussi paralleles entre
N. 513. elles (n).

Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION X.

Théorême.

518. *Les angles dont les sommets regardent le même côté, & dont les côtés sont paralleles, chacun à chacun, sont égaux; quand même ils ne seroient point dans le même plan.*

Fig. 19. Les angles ABC* & DEF, dont les côtés ED & BA, EF & BC sont paralleles, chacun à chacun, sont égaux; quand même ils seroient dans des plans différens.

Const. Prenez à volonté sur les côtés des angles proposés, les parties égales BA & ED, BC & EF. Tirez ensuite, des points A, B & C, aux points D, E & F, les lignes droites AD, BE & CF; & des points A & D aux points C & F, les lignes droites AC & DF.

Démonst. Puisque dans le quadrilatere AE, les côtés BA & ED sont égaux [C] & paralleles [H], le côté AD est égal &

parallele au côté BE (n). Et par une raiſon N. 142.
pareille, le côté BE eſt auſſi égal & parallele au coté CF. Donc, les côtés AD & CF du quadrilatere CD ſont égaux & paralleles (n). Par conſéquent, le côté N. 62.
AC eſt égal au côté DF (n). N. 142.

Ainſi, dans les triangles ABC & DEF, le côté BA eſt égal au côté ED [C]; le côté BC au côté EF [C], & le côté AC au côté DF [D]. Donc, l'angle ABC eſt égal à l'angle DEF (n). N. 88.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XI.

PROBLÊME.

519. *D'un point donné hors d'un plan, abaiſſer une perpendiculaire à ce plan.*

IL faut abaiſſer du point A *, une per- Fig. 20.
pendiculaire au plan X.

Conſt. Tirez à volonté dans le plan X, une ligne droite BC. Abaiſſez du point A (n), la perpendiculaire AD à cette ligne. N. 96.
Du point D, élevez dans le même plan (n), la perpendiculaire DE à cette même N. 95.
ligne. Enfin (n), abaiſſez du même point N. 96.
A, la perpendiculaire AE à la ligne DE. Elle ſera la perpendiculaire demandée.

Pour la démonstration. Tirez par le
N. 133. point E (n), la parallele FG à la ligne BC.

Démonst. La ligne BC est perpendi-
N. 511. culaire au plan du triangle ADE (n); puisqu'elle l'est & à la ligne AD, & à la ligne DE [c]. Donc, puisque la ligne FG est parallele à cette ligne BC [c], elle est aussi perpendiculaire au même
N. 516. plan (n); & par conséquent, à la ligne
N. 473. AE (n).

Ainsi, la ligne AE est perpendiculaire à la ligne DE [c], & à la ligne FG [d].
N. 511. Donc elle l'est aussi au plan X (n).

Par conséquent, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

Ce Problême sert, dans la Gnomonique, à trouver le pied du style.



PROPOSITION XII.

PROBLÊME.

520. *D'un point donné dans un plan, élever une perpendiculaire à ce plan.*

IL faut élever du point A *, une perpendiculaire au plan X. Fig. 21.

Conſt. Du point B, pris à volonté hors du plan X, abaiſſez (n) une perpendiculaire BC à ce plan. Tirez enſuite par le point A (n), une parallele AD à cette ligne BC. Elle ſera la perpendiculaire demandée. N. 519. N. 133.

Démonſt. La ligne BC eſt perpendiculaire au plan X [c]. Ainſi, puiſque la ligne AD eſt parallele à cette ligne BC [c], elle eſt auſſi perpendiculaire au même plan (n). N. 516.

Par conſéquent, C. Q. F. F.



PROPOSITION XIII.

THÉORÊME.

521. *D'un même point, on ne peut ni élever, ni abaisser, plus d'une perpendiculaire au même plan.*

Fig. 22. ON ne peut du point A *, élever plus d'une perpendiculaire au plan X ; ni du point B, lui en abaisser plus d'une.

Démonst. Les lignes droites qui sont perpendiculaires chacune au même plan,
N. 513. sont paralleles (n). Ainsi, elles n'ont au-
N. 56. cun point de commun (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

522. Il suit de ce théorême, que *si deux plans sont perpendiculaires, toute ligne droite qui est tirée d'un point quelconque de l'un de ces plans, perpendiculairement à l'autre, passe par leur commune section.*

Fig. 23. Si le plan Y * est perpendiculaire au plan X, toute perpendiculaire à ce dernier plan, qui sera tirée d'un point quelconque A du premier, passera par leur commune section CD.

Const.

Conſt. Abaiſſez du point A (n), une perpendiculaire AB à la commune ſection CD. N. 96.

Démonſt. La ligne AB eſt dans le plan Y, puiſque ſes points A & B y ſont [c]. Ainſi, puiſqu'elle eſt perpendiculaire à la commune ſection CD [c], elle l'eſt auſſi au plan X (n). N. 475.

Or, cette ligne, qui eſt la ſeule perpendiculaire à ce plan, que l'on puiſſe tirer du point A (n), paſſe par la commune ſection CD [c]. Donc, toute ligne droite qui étant tirée du même point ne paſſe pas par cette commune ſection, n'eſt point perpendiculaire à ce plan. N. 521.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XIV.

THÉORÊME.

523. *Si une même ligne droite eſt perpendiculaire à deux plans, ces plans ſont paralleles.*

Si la ligne droite AB * eſt perpendiculaire au plan AD & au plan BC, ces plans ſont paralleles. Fig. 24

Conſt. Du point D, pris à volonté

X

N. 133. dans le plan AD, tirez (n) la parallele DC à la ligne AB. Tirez ensuite, des points A & B aux points D & C, les lignes droites AD & BC.

Démonst. Les lignes AD & BC sont
N. 515. chacune dans le même plan (n); puisque [c] elles rencontrent les lignes AB & DC qui sont paralleles [c]. Ainsi, puisqu'elles sont perpendiculaires chacune à la même
N. 473. ligne AB (n), elles sont aussi paralleles
N. 129. (n). Donc, le quadrilatere AC est un parallélogramme. Par conséquent, le point D est aussi éloigné du point C, que le
N. 143. point A l'est du point B (n).

Or, la même démonstration subsiste, à quelque point du plan AD que l'on prenne le point D. Donc, tous les points de ce plan sont également éloignés de tous les points correspondans du plan BC. Par conséquent, ces deux plans sont paralle-
N. 478. les (n).

Donc, C. Q. F. D.



PROPOSITION XV.

THÉORÊME.

524. *Si deux angles qui sont dans des plans differens, ont leurs côtés paralleles, chacun à chacun, ces plans sont aussi paralleles.*

SI les côtés BA * & BC, ED & EF des angles ABC & DEF, qui sont l'un dans le plan X & l'autre dans le plan Y, sont paralleles chacun à chacun, ces plans sont aussi paralleles. Fig. 25.

Const. Abaissez du point B (n), une perpendiculaire BG au plan Y. Tirez ensuite (n), du point G auquel cette perpendiculaire rencontre ce plan, une parallele GI au côté EF; & une parallele GH au côté ED. N. 519. N. 133.

Démonst. Les lignes BC & GI sont paralleles entr'elles (n); puisqu'elles le sont l'une [H] & l'autre [C] à la même ligne EF. Et par une raison pareille, les lignes BA & GH sont aussi paralleles. N. 517.

Ainsi, puisque la ligne BG est perpendiculaire aux lignes GI & GH (n), elle l'est aussi à leurs paralleles BC & BA (n); & par conséquent au plan X (n). N. 473. N.

Or, puiſque la ligne BG, qui eſt perpendiculaire au plan Y [C], l'eſt auſſi au plan X [D], ces deux plans ſont pa-
N. 523. ralleles (n).

Par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XVI.

THÉORÊME.

525. *Si deux plans qui ſont coupés par un troiſieme, ſont paralleles, leurs communes ſections ſont auſſi paralleles.*

Fig. 26. SI les plans X * & Y, qui ſont coupés par le plan Z, ſont paralleles, leurs communes ſections AB & CD ſont auſſi paralleles.

Démonſt. Lorſque les lignes droites qui ſont chacune dans le même plan, ne ſont point paralleles, elles ſe rencontreroient, ſi on les prolongeoit autant qu'il le ſeroit néceſſaire.

Or, les communes ſections AB & CD
N. 510. ſont des lignes droites (n); elles ſont
N. 472. chacune dans le même plan Z (n); & étant prolongées autant qu'on le voudroit, elles ne ſe rencontreroient point; puiſque elles ſont auſſi l'une dans le plan X, &

l'autre dans le plan Y (n), qui ne se ren- N. 472.
contrent point (n). Donc, elles sont N. 479.
paralleles.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XVII.

THÉORÊME.

526. *Si des plans paralleles coupent plusieurs lignes droites, ces lignes sont coupées proportionnellement.*

Si les plans X * Y & Z, qui coupent Fig. 27.
les lignes droites AB & CD, sont paralleles, on a cette proportion, AE . EB :: CF . FD.

Const. Tirez du point A au point D, la ligne droite AD.

Démonst. Le plan du triangle BAD coupe les plans Y & Z, qui sont paralleles [H]. Ainsi, leurs communes sections EG
& BD sont paralleles (n). N. 525.

Pareillement, le plan du triangle ADC coupe les plans Y & X, qui sont aussi paralleles [H]. Ainsi, leurs communes
sections GF & AC sont aussi paralleles (n). N. 525.

Or, puisque les lignes EG & BD sont paralleles, on a cette proportion AE . EB
:: AG . GD (n) : & par une raison pa- N. 411.

reille, AG . GD :: CF . FD. Donc,
N. 350. AE . EB :: CF . FD (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÊME.

527. *Si une ligne droite est perpendiculaire à un plan, tous les plans dans lesquels cette perpendiculaire se trouve, sont aussi perpendiculaires à ce même plan.*

Fig. 28. Si la ligne droite AB * qui est dans le plan Y, est perpendiculaire au plan X, le plan Y est aussi perpendiculaire au plan X.

Const. Du point F, pris à volonté dans
N. 133. la commune section CD, tirez (n) une parallele EF à la ligne AB.

Démonst. La ligne AB est perpendiculaire au plan X [H]. Ainsi, la ligne EF, qui est parallele à cette ligne [C], est aussi
N. 516. perpendiculaire au même plan (n); & par conséquent à la commune section CD
N. 473. (n).

Or, il en est de même de toutes les paralleles à la ligne AB que l'on peut tirer dans le plan Y. Donc, ce plan est per-
N. 475. pendiculaire au plan X (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XIX.

THÉORÊME.

528. *Si deux plans qui se coupent sont perpendiculaires chacun à un troisieme, leur commune section lui est aussi perpendiculaire.*

LA commune section AB * des plans Y & Z qui sont perpendiculaires chacun au plan X, est aussi perpendiculaire au même plan. Fig. 29.

Démonst. La commune section AB doit être en même tems dans le plan Y & dans le plan Z (n). Or, si elle inclinoit vers C, ou vers D, elle ne seroit plus dans le plan Z : si elle inclinoit vers E, ou vers F, elle ne seroit plus dans le plan Y : & si elle inclinoit vers tout autre côté, elle ne seroit dans aucun de ces plans. Donc, elle n'incline vers aucun côté du plan X. Par conséquent, elle est perpendiculaire à ce plan. N. 472.

Donc, C. Q. F. D.





SECONDE PARTIE.

DES SOLIDES.

PROPOSITION XX.

THÊORÉME.

529. *Lorſque trois angles plans forment un angle ſolide, chacun de ces trois angles eſt plus petit que la ſomme des deux autres.*

Fig. 30. LA ſomme de deux quelconques des trois angles plans BAC*, CAD & BAD, qui forment l'angle ſolide A, par exemple, celle des angles BAC & CAD, eſt plus grande que l'angle BAD.

Conſt. Sur le côté AB du plus grand
N. 119. des angles propoſés, décrivez (n) un angle BAE qui ait le point A pour ſommet, & ſoit égal à l'angle BAC. Prenez à volonté ſur les côtés AC & AE, les parties égales AC & AE. Du point B, pris à volonté ſur le côté AB, tirez au point C la ligne droite BC; & par le point E,

la ligne droite BED. Enfin, tirez auſſi du point C au point D, la ligne droite CD.

Démonſt. Les triangles BAC & BAE ont l'angle BAC égal à l'angle BAE, le côté AC au côté AE, & le côté AB de commun [c]. Donc, le côté BC eſt égal au côté BE (n). Par conſéquent, puiſque N. 82.
dans le triangle BCD, la ſomme des côtés BC & CD eſt plus grande que le côté BED (n), ſi de cette ſomme on retran- N. 114.
che le côté BC, & du côté BED le côté BE, le reſte CD de cette ſomme eſt plus grand que le reſte ED de ce côté.

Ainſi, dans les triangles CAD & EAD, le côté AC eſt égal au côté AE [c], & le côté AD eſt commun; mais le côté CD eſt plus grand que le côté ED. Donc, l'angle CAD eſt auſſi plus grand que l'angle EAD (n). Par conſéquent, puiſque N. 122.
les angles BAC & BAE ſont égaux [c], la ſomme des angles BAC & CAD eſt plus grande que l'angle BAD, qui eſt celle des angles BAE & EAD.

Donc, C. Q. F. D.



PROPOSITION XXI.

THÉORÊME.

530. *La ſomme de tous les angles plans qui forment un angle ſolide, eſt plus petite que celle de quatre angles droits.*

Fig. 31. LA ſomme des angles plans BAC *, CAD & BAD, qui forment l'angle ſolide A, eſt plus petite que celle de quatre angles droits.

Démonſt. Dans le triangle BCD, la ſomme des angles BCD, CDB & CBD, eſt égale à celle de deux angles droits
N. 136. (n). Or, les angles ACB & ACD valent
N. 529. plus que l'angle BCD (n), puiſque l'angle C eſt un angle ſolide : & par une raiſon pareille, les angles ADC & ADB valent plus que l'angle CDB; & les angles ABC & ABD, plus que l'angle CBD. Donc, les ſix angles ACB, ACD, ADC, ADB, ABC & ABD, valent plus de deux angles droits. Mais, ces ſix mêmes angles, avec les angles BAC, CAD & BAD, ne valent que ſix angles droits
N. 136. (n); puiſqu'avec ces trois derniers, ils ſont tous les angles des triangles BAC,

CAD & BAD. Donc, ces trois derniers angles ne valent point quatre angles droits.

Par conféquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

531. Il fuit de ce théorême, que *les feules figures régulieres dont les angles peuvent former des angles folides, font les triangles équilatéraux, les quarrés & les pentagones.*

PROPOSITION XXIV†.

THÉORÊME.

532. *Si tous les plans qui terminent un folide font paralleles, chacun à chacun, ils font parallélogrammes; & les oppofés font égaux & femblables.*

Si tous les plans AC *, EG, ED, &c. Fig. 32.
qui terminent le folide X, font paralleles, chacun à chacun, ils font parallélogrammes: & les oppofés AC & EG, ED & FC, &c. font égaux & femblables.

Démonft. Les côtés AD & BC font paralleles (n); puifqu'ils font les commu- N. 525.

† Les propofitions 22 & 23 font inutiles.

nes sections du plan AC, & des plans paralleles [H] AH & BG. Et par une raison pareille, les côtés AB & DC sont aussi paralleles.

Or, on démontre de la même maniere le parallélisme des côtés, dans les quadrilateres EG, ED, FC, &c. Ainsi, tous ces
N. 57. quadrilateres sont parallélogrammes (n).

Mais, puisque tous ces quadrilateres sont parallélogrammes, les côtés AB & EF du quadrilatere EB sont égaux; & les côtés AD & EH du quadrilatere ED le
N. 143. sont aussi (n): d'ailleurs, les angles DAB
N. 518. & HEF sont égaux (n); puisque leurs côtés AD & EH, AB & EF, sont paral-
N. 525. leles chacun à chacun (n). Ainsi, les parallélogrammes AC & EG sont égaux & semblables.

Or, par la même raison, les parallélogrammes ED & FC, EB & HC, sont aussi égaux & semblables.

Par conséquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION XXVIII †.

THÉORÊME.

533. *Un plan qui coupe diagonalement deux des plans opposés d'un parallélépipede, divise ce solide en deux parties, qui sont égales & semblables.*

LE plan AG* qui coupe diagonalement les deux parallélogrammes opposés ED & FC du parallélépipede X, divise ce solide en deux parties EGA & DBH, qui sont égales & semblables. Fig. 33.

Démonst. Le plan EB est égal & semblable au plan HC, & le plan EG au plan AC; puisque dans les parallélépipedes, les plans opposés sont égaux & semblables (n). Or, le plan EAH est aussi égal & semblable au plan DHA, & le plan FBG au plan CGB; puisque les parallélogrammes sont divisés par leurs diagonales, en deux parties égales & semblables (n). Donc, les solides EGA & DBH, qui sont terminés par ces plans & par un plan commun AG, sont égaux & semblables (n).

N. 532. N. 143. N. 481.

Par conséquent, C. Q. F. D.

† Les propositions 25, 26 & 27, sont inutiles.

PROPOSITION XXIX.

THÉORÊME.

534. *Les parallélépipedes qui ont la même base, & sont entre les mêmes plans paralleles, sont égaux.*

Fig. 34 & 35. LES parallélépipedes X * & Y, qui ont la même base BD, & sont entre les mêmes plans paralleles AC & EL, sont égaux.

Les côtés EF & IK sont chacun dans la même ligne droite; ou ils n'y sont point.

PREMIER CAS.

Fig. 34. *Lorsque les côtés EF * & IK sont chacun dans la même ligne droite EK.*

Démonst. Le plan AH est égal & semblable au plan DG, & le plan AM au plan DL; puisque dans les parallélépipedes, les plans opposés sont égaux & sembla-
N. 532. bles (n). Le plan HI est aussi égal & semblable au plan GK; puisque les plans EG & IL sont égaux & semblables l'un &
N. 531. l'autre au plan BD (n). Enfin, par une démonstration pareille à celle du n° 147, le plan AEI est égal & semblable au plan

DFK ; & le plan BHM au plan CGL. Donc, les prifmes triangulaires AME & DLF qui font terminés par ces plans, font égaux (n). N. 481.

Par conféquent, fi l'on retranche de chacun le même prifme triangulaire NMF qui leur eft commun, les reftes, qui font les folides AOE & DOK, font auffi égaux (n). Mais, puifque ces folides font N. 63. égaux, fi l'on ajoute à chacun le même prifme triangulaire, DBN, les fommes font égales (n). Or, ces fommes font les N. 64. parallélépipedes X & Y. Donc, ces parallélépipedes font égaux.

SECOND CAS.

Lorfque les côtés EF & IK ne font point* Fig. 35. *chacun dans la même ligne droite.*

Conft. Prolongez les côtés EF, HG, MI & LK, jufqu'à ce qu'ils fe rencontrent à des points N, O, P & Q. Tirez enfuite, des points A, B, C & D, aux points N, O, P & Q, les lignes droites AN, BO, CP & DQ.

Démonft. Le plan QO eft égal, femblable & parallele au plan DB [c]. Ainfi, le folide DBOQ eft un parallélépipede (n). Or [c], ce parallélépipede & le pa- N. 505. rallélépipede X ont la même bafe BD,

ſont entre les mêmes plans paralleles AC & EOM, & ont leurs côtés NO & EF dans la même ligne droite EO. Ainſi, ils ſont égaux [D].

Mais, ce même parallélépipede DBOQ & le parallélépipede Y ſont auſſi égaux [D]; puiſque [C] ils ont auſſi la même baſe B D, ſont entre les mêmes plans paralleles AC & EOM, & ont leurs côtés NQ & IM dans la même ligne droite NM. Donc, les parallélépipedes X & Y ſont
N. 62. égaux (n).

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

535. Il ſuit de ce théorême, que *les parallélépipedes qui ont des baſes égales, & ſont entre les mêmes plans paralleles, ſont égaux.*

SCHOLIE.

536. *Comme le meſurage des ſolides dépend primitivement de celui des parallélépipedes rectangles, nous allons enſeigner la maniere de meſurer ces figures, conformément à ce que nous avons promis au* nº 149.

Meſurer un ſolide, c'eſt conſidérer la maniere dont il contient un certain cube que
N. 148. *l'on prend pour meſure* (n). *Ainſi, pour*

savoir mesurer un parallélépipede rectangle, il suffit de savoir déterminer la maniere dont il contient le cube que l'on veut prendre pour mesure.

Or, il est évident que si le parallélogramme AC, qui est l'une des faces d'un parallélépipede rectangle quelconque DL, contient, par exemple, quatre quarrés AF, HG, &c. égaux chacun à la base* st *du cube M, (que nous supposons être la mesure dont on veut se servir), ce parallélépipede peut être divisé en quatre autres EK, FL, &c. qui auront chacun une base AF, HG, FD, &c. égale à cette base* st. *Et si la hauteur AI contient, par exemple, trois fois la hauteur* su *de cette mesure M, il est encore évident que chacun des parallélépipedes EK, FL, &c. peut être subdivisé en trois autres, qui auront aussi la même hauteur que cette même mesure M. Ainsi, tout le parallélépipede rectangle DL pourroit être divisé en quatre fois* 3, *ou* 12 *solides égaux chacun à la mesure M; & contient par conséquent* 12 *parties égales chacune à cette mesure.*

* Fig. 36.

D'où l'on conclut cette regle générale du mesurage des parallélépipedes rectangles.

537. La solidité † d'un parallélépipede

† La solidité se nomme aussi le *volume*.

rectangle, eſt égale au produit du nombre des meſures quarrées qui ſont contenues dans ſa baſe, multiplié par le nombre des meſures courantes qui ſe trouvent dans ſa hauteur : *ou, pour nous ſervir de l'expreſſion ordinaire*, un parallélépipede rectangle eſt égal au produit de ſa baſe multipliée par ſa hauteur.

Et cette regle convient également à un
Fig. 37. *parallélépipede incliné quelconque X*. Car,*
N. 534. *puiſque* (n) *ce parallélépipede incliné eſt égal à un parallélépipede rectangle Y qui auroit la même baſe AB que lui, & ſeroit entre les mêmes plans paralleles AB & GH, on a également la ſolidité du parallélépipede incliné X, comme celle du parallélépipede rectangle Y, en multipliant la baſe AB par la hauteur EF. Or, c'eſt la même choſe de multiplier cette baſe par la hauteur EF, que de la multiplier par la hauteur CD; puiſque les plans AB & GH étant paralleles, ces hauteurs ſont égales.*



PROPOSITION XXXII†.

THÉORÊME.

538. *Les parallélépipedes dont les hauteurs sont égales, sont entr'eux comme leurs bases.*

LES parallélépipedes AL * & MX qui ont des hauteurs égales, sont entr'eux, ce que le parallélogramme AC est au parallélogramme MO. Fig. 38.

Const. Divisez la plus petite AC des deux bases AC & MO, en tel nombre de parallélogrammes égaux qu'il vous plaira; par exemple, en trois parallélogrammes égaux AF, EH & GC. Décrivez ensuite sur le côté MR (n), un parallélogramme MS qui soit égal au parallélogramme AF; & qui ait l'angle RMN pour l'un de ses angles. Enfin, faites passer par chaque ligne de division EF & GH, des plans EI & GK paralleles au plan BL; & par la ligne PS, un plan PT parallele au plan NX. N. 165.

Démonst. Les parallélépipedes AI, EK, GL & MT, sont égaux (n); puisqu'ils ont des bases égales [c], & des hauteurs N. 535.

† Les propositions 30 & 31 sont inutiles.

égales [H]. Ainſi, l'on démontre que le parallélépipede AL eſt au parallélépipede MX, ce que la baſe AC eſt à la baſe MO, par un raiſonnement tout pareil à celui dont on s'eſt ſervi au nº 405, pour démontrer que les parallélogrammes qui ont des hauteurs égales, ſont auſſi entr'eux comme leurs baſes.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXIII.

Théorême.

539. *Les parallélépipedes ſemblables ſont entr'eux en rapport triplé de celui de leurs côtés pareils.*

Fig. 39. Si les parallélépipedes AD * & BM ſont ſemblables, le rapport du premier au ſécond, eſt triplé de celui de leurs côtés pareils; par exemple, de celui du côté AB au côté BC.

Conſt. Diſpoſez les parallélépipedes AD & BM, de maniere que les côtés BC & BG du plan ſupérieur BO, deviennent les prolongemens des côtés AB & FB du plan inférieur AF. Prolongez enſuite le parallélépipede AD, juſqu'à ce

que les plans MC & CK ſoient un même plan MCK ; & le parallélépipede BM, juſqu'à ce que les plans LH & HK ſoient auſſi un même plan LHK.

Démonſt. Le parallélépipede AD eſt au parallélépipede BK, ce que la baſe AF eſt à la baſe BN (n) : la baſe AF eſt à la N. 538.
baſe BN, ce que le côté AB eſt au côté BC (n) : le côté AB eſt au côté BC, N. 405.
ce que le côté FB eſt au côté BG (n) † : N. 480.
le côté FB eſt au côté BG, ce que la baſe BN eſt à la baſe BO (n) : enfin la baſe N. 405.
BN eſt à la baſe BO, ce que le parallélépipede BK eſt au parallélépide BL (n). Donc, le parallélépipede AD eſt au N. 538.
parallélépipede BK, ce que le même parallélépipede BK eſt au parallélépipede BL (n). Par conſéquent, ces trois parallélé- N. 350.
pipedes ſont en proportion continue (n). N. 334.

Pareillement, le parallélépipede BK eſt au parallélépipede BL, ce que la baſe BN eſt à la baſe BO (n) : la baſe BN eſt N. 538.
à la baſe BO, ce que le côté FB eſt au côté BG (n) : le côté FB eſt au côté BG, N. 405.
ce que le côté BH eſt au côté BI (n) : le N. 480.
côté BH eſt au côté BI, ce que la baſe BQ eſt à la baſe BP (n) : enfin, la baſe N. 405.

† Les côtés pareils des ſolides ſemblables, ſont proportionnels. Car les ſolides ne ſont ſemblables, que parce que les plans qui les terminent le ſont auſſi, chacun à chacun, n° 480.

BQ eſt à la baſe BP, ce que le parallélépipede BL eſt au parallélépipede BM
N. 538. (n). Donc, le parallélépipede BK eſt au parallélépipede BL, ce que le même parallélépipede BL eſt au parallélépipede
N. 350. BM (n). Par conſéquent, ces trois derniers parallélépipedes ſont auſſi en pro-
N. 334. portion continue (n).

Ainſi, les quatre parallélépipedes AD, BK, BL & BM, ſont en proportion continue. Par conſéquent, le rapport du premier au dernier eſt triplé de celui du
N. 348. premier au ſecond (n). Mais, le rapport du premier au ſecond eſt le même que
N. 538. celui de la baſe AF à la baſe BN (n); & ce dernier rapport eſt le même que celui
N. 405. du côté AB au côté BC (n). Donc, le rapport du parallélépipede AD au parallélépipede BM, eſt triplé de celui du côté
N. 350. AB au côté BC (n).

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

540. Il ſuit de ce théorême, & du nº 348, que *ſi quatre lignes droites ſont en proportion continue, un parallélépipede quelconque décrit ſur la premiere, eſt à un parallélépipede ſemblable, & ſemblablement poſé ſur la ſeconde, ce que cette premiere ligne eſt à la quatrieme.*

PROPOSITION XXXIV.

THÉORÊME.

541. *Les parallélépipedes dont les ſolidités ſont égales, ont leurs baſes & leurs hauteurs réciproquement proportionnelles : & ceux dont les baſes & les hauteurs ſont réciproquement proportionnelles, ont leurs ſolidités égales.*

PREMIÉREMENT. Si les parallélépipedes Y* & X ſont égaux, la baſe CD eſt à la baſe AB, ce que la hauteur AE eſt à la hauteur CG. Fig. 40.

Conſt. Prenez ſur la hauteur CG, une partie CF égale à la hauteur AE. Faites enſuite paſſer par le point F, un plan FH parallele à la baſe CD.

Démonſt. La baſe CD eſt à la baſe AB, ce que le ſolide CH eſt au ſolide X (n), N. 538.
ou Y [H] : le ſolide CH eſt au ſolide Y, ce que la baſe CI eſt à la baſe CK (n) : N. 538.
enfin, la baſe CI eſt à la baſe CK, ce que la hauteur CF, ou AE [c], eſt à la hauteur CG (n). Donc, la baſe CD eſt à N. 405.
la baſe AB, ce que la hauteur AE eſt à la hauteur CG (n). N. 350.

Par conſéquent, C. Q. F. 1° D.

N. 40. SECONDEMENT. Si la baſe CD* eſt à la baſe AB, ce que la hauteur AE eſt à la hauteur CG, les parallélépipedes Y & X ſont égaux.

Conſt. La même que la précédente.

Démonſt. Le ſolide CH eſt au ſolide X, ce que la baſe CD eſt à la baſe AB
N. 538. (n) : la baſe CD eſt à la baſe AB, ce que la hauteur AE, ou CF [c], eſt à la hauteur CG [H] : la hauteur CF eſt à la hauteur CG, ce que la baſe CI eſt à la baſe
N. 405. CK (n) : enfin, la baſe CI eſt à la baſe CK, ce que le ſolide CH eſt au ſolide
N. 538. Y (n). Donc, le ſolide CH eſt au ſolide X, ce que le même ſolide CH eſt au
N. 350. ſolide Y (n) ; & par conſéquent, les ſo-
N. 356. lides Y & X ſont égaux (n).

Donc, C. Q. F. 2° D.



PROPOSITION

PROPOSITION XXXVI †.

THÉORÊME.

542. *Si trois lignes droites sont en proportion continue, un parallélépipede quelconque décrit avec ces trois lignes, est égal à un autre parallélépipede décrit avec la moyenne, & équiangle au premier.*

LES parallélépipedes équiangles X * & Y sont égaux, si le côté AC est moyen proportionnel entre les côtés AB & BL; & si les côtés EG, EF & FM sont égaux chacun au côté AC. Fig. 41.

Const. Abaissez du point C (n), la perpendiculaire CI au côté AB; & du point G, la perpendiculaire GK au côté EF. N. 96.

Démonst. Puisque les parallélogrammes AL & EM sont équiangles [H], le premier est au second, ce que le produit du côté AB multiplié par le côté BL, est à celui du côté EF multiplié par le côté FM (n). Or, ces produits N. 447. sont égaux (n); puisque, AB . EF :: N. 362.

† La proposition 35 est inutile.

Y

FM . BL [H]. Donc, ces parallélogrammes le sont aussi. Mais, les perpendiculaires CI & GK sont aussi égales (n);
N. 123. puisque dans les triangles ACI & EGK, qui sont rectangles, l'un en I & l'autre en K [C], le côté AC est égal au côté EG, & l'angle CAB à l'angle GEF [H]. Donc, les solides X & Y ont des bases égales, & des hauteurs égales. Par conséquent, ils sont égaux (n).
N. 535.

Donc, C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXVII.

THÉORÊME.

543. *Si quatre lignes droites ſont proportionnelles, les parallélépipedes ſemblables & ſemblablement poſés ſur les deux premieres, ſont proportionnels aux parallélépipedes ſemblables & ſemblablement poſés ſur les deux dernieres: & ſi deux parallélépipedes ſemblables ſont proportionnels à deux autres parallélépipedes auſſi ſemblables, les côtés pareils des premiers ſont proportionnels aux côtés pareils des derniers.*

PREMIÉREMENT. Si AB *. CD : : EF. GH, les parallélépipedes V & X, qui ſont ſemblables & ſemblablement poſés ſur les deux premieres, ſont proportionnels aux parallélépipedes Y & Z, qui ſont auſſi ſemblables & ſemblablement poſés ſur les deux dernieres. Fig. 42.

Démonſt. La même que celle de la premiere partie du nº 445, en y ſubſtituant les noms de *parallélépipede* & de *rapport triplé*, à ceux de *polygone* & de *rapport doublé.*

SECONDEMENT. Si les parallélépipedes V * & X qui sont semblables, sont proportionnels aux parallélépipedes Y & Z qui sont aussi semblables, les côtés, par exemple AB & CD des deux premiers, sont proportionnels aux côtés EF & GH des deux derniers.

Fig. 42.

Démonst. La même que celle de la seconde partie du nº 445, en y substituant le nom de *parallélépipede*, à celui de *polygone.*

SCHOLIE.

544 *Tout ce que l'on démontre ici des parallélépipedes, depuis la proposition* 534 *inclusivement, convient pareillement aux prismes triangulaires ; car, un prisme triangulaire quelconque ECF *, peut toujours être considéré comme étant la moitié d'un parallélépipede EN, coupé diagonalement par un plan CF. Or, puisque ce que nous disons des parallélépipedes convient pareillement à tous les prismes triangulaires, il convient aussi à tous les prismes en général ; car, il n'y a point de prisme, quel qu'il soit, qui ne puisse être divisé en prismes triangulaires ; par la même raison qu'il n'y a point de polygone qui ne puisse être divisé en triangles.*

Fig. 43.

PROPOSITION XXXVIII.

THÉORÊME.

545 *Deux prismes triangulaires qui ont des hauteurs égales, sont égaux; s'ils ont pour bases, l'un un triangle, & l'autre un parallélogramme double de ce triangle.*

LES prismes triangulaires ECF* & LGI, Fig. 43.
qui ont des hauteurs égales, sont égaux; si le triangle EDF qui est la base du premier, n'est que la moitié du parallélogramme LI qui est la base du second.

Démonst. Les parallélépipedes EN & LO sont égaux (n); puisqu'ils ont des N. 535.
hauteurs égales [H], & que le triangle EDF n'étant que la moitié du parallélogramme LI [H], les bases EP & LI sont aussi égales. Or, les prismes ECF & LGI sont les moitiés, l'un du parallélépipede EN, & l'autre du parallélépipede LO (n). N. 533.
Donc, ces prismes sont égaux (n). N. 68.

Par conséquent, C. Q. F. D.





LES ÉLÉMENS D'EUCLIDE.

LIVRE DOUZIEME.

Ce Livre eſt le dernier de ceux des Elémens d'Euclide qui ſont néceſſaires. Les deux premieres propoſitions ſuivent ſi naturellement la vingt-deuxieme du ſixieme Livre, qu'il eſt ſurprenant qu'on ait pu les tranſporter ici. La troiſieme & la quatrieme deviennent inutiles, parce qu'elles ne ſervent qu'à démontrer la cinquieme ; & nous le faiſons d'une maniere différente de celle d'Euclide. Ainſi, nous les ſupprimons, & nous mettons à leur place les deux ſeules du treizieme Livre qui ſoient utiles. Toutes les propoſitions qui ſuivent, depuis la cinquieme juſqu'à la quinzieme incluſivement, conſiderent les pyramides, les cylindres

& les cônes. Nous ſupprimons auſſi la ſeizieme & la dix-ſeptieme, qui ne ſont d'aucun uſage. Mais, comme Euclide ne parle, ni de la ſolidité de la ſphere, ni de ſa ſurface, nous ſubſtituons à ces deux propoſitions, notre démonſtration de cette ſolidité, & celle des démonſtrations ordinaires de cette ſurface, qui nous paroît la plus ſimple. Enfin, la dix-huitieme propoſition, qui eſt la derniere d'Euclide, détermine les rapports que les ſpheres ont entr'elles.

PROPOSITION I.

THÉORÊME.

546 *Les polygones ſemblables qui ſont inſcrits dans des cercles, ſont entr'eux comme les quarrés des diametres de ces cercles.*

Fig. 1. LES polygones ſemblables A C E * & FHK, qui ſont inſcrits, l'un dans le cercle X, & l'autre dans le cercle Y, ſont entr'eux ce que le quarré du diametre BL eſt au quarré du diametre GM.

Conſt. Tirez des points B & L aux points D & C, les lignes droites BD &

LC ; & des points G & M aux points I & H, les lignes droites GI & MH.

Démonst. Puisque les polygones ACE & FHK sont semblables [H], l'angle BCD est égal à l'angle GHI, & les côtés BC & CD sont proportionnels aux côtés GH & HI (n). Ainsi, les triangles BCD & N. 400.
GHI sont équiangles (n); & par consé- N. 417.
quent, l'angle BDC est égal à l'angle GIH. Mais, puisque ces deux angles sont égaux, l'angle BLC qui est égal au premier, & l'angle GMH qui l'est au second (n), sont aussi égaux (n). Donc, puisque N. 250. N. 62.
les triangles BCL & GHM sont rectangles, l'un en C & l'autre en H (n), ils sont aussi N. 263.
équiangles (n); & par conséquent, les N. 137.
quatre lignes BC, GH, BL & GM, sont proportionnelles (n). N. 413.

Or, les polygones ACE & FHK sont des figures semblables & semblablement posées sur les deux premieres [H]; & les quarrés des diametres BL & GM sont aussi des figures semblables & semblablement posées sur les deux dernieres (n). Donc, ces N. 400.
deux polygones sont entr'eux comme ces deux quarrés (n). N. 445.

Par conséquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION II.

THÉORÊME.

547 *Les cercles ſont entr'eux, comme les quarrés de leurs diametres.*

Fig. 1. LE cercle X * eſt au cercle Y, ce que le quarré du diametre BL eſt à celui du diametre GM.

Démonſt. On peut ſuppoſer dans le cercle X, un polygone régulier d'un ſi grand nombre de côtés, que ſa différence à ce cercle ſoit abſolument inſenſible; & s'en imaginer auſſi un pareil dans le cercle Y
N. 408. (n). Or, puiſque ces polygones ſeront ſemblables [s], ils ſeront entr'eux ce que le quarré du diametre BL eſt à celui du
N. 546. diametre GM (n). Donc, puiſque les cercles X & Y ne different point de ces mêmes polygones [s], ils ſont auſſi entre eux, ce que le quarré du diametre BL eſt à celui du diametre GM.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

548. Il ſuit de ce théorême, que *les cercles ſont entr'eux comme les polygones ſemblables qui y ſont inſcrits.*

PROPOSITION III.

* THÉORÊME.

549. *Une ligne droite qui eſt compoſée des côtés d'un exagone & d'un décagone, réguliers l'un & l'autre & inſcrits chacun dans le même cercle, eſt diviſée en moyenne & extrême raiſon.*

LA ligne droite FD * dont les parties FE & ED ſont les côtés, l'une d'un exagone & l'autre d'un décagogne, réguliers l'un & l'autre & inſcrits chacun dans le même cercle, eſt diviſée en moyenne & extrême raiſon au point E. Fig. 2.

Conſt. Des points D & E, pris pour centres, & avec un rayon égal à la partie FE, décrivez deux arcs qui ſe coupent à un point G. De ce point, pris pour centre, & avec le même rayon, décrivez le cercle EDC. Enfin, tirez du même centre G aux points D, E & F, les lignes droites GD, GE & GF.

Démonſt. L'angle EGD eſt de 36 degrés, puiſqu'il a pour meſure l'arc DE (n), N. 37.
qui eſt la dixieme partie de la circonférence [H]. Ainſi, puiſque le triangle DGE eſt iſoſcele [C], l'angle GED eſt de 72

N. 84. degrés (n). Mais, cet angle qui est extérieur au triangle GEF, est double de l'an-
N. 135. gle F (n); puisque ce triangle est aussi isoscele [c]. Donc, l'angle F est aussi de 36 degrés. Par conséquent, puisque l'angle D est commun aux triangles GFD & DGE,
N. 137. ces deux triangles sont équiangles (n).

Or, puisque ces deux triangles sont
N. 413. équiangles, FD . GD : : GD . ED (n). Donc, puisque les lignes FE & GD sont
N. 61. égales [c], FD . FE : : FE . ED (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

550. Il suit de ce théorême, que *si une ligne droite est divisée en moyenne & extrême raison, les deux segmens sont les côtés d'un exagone & d'un décagone, réguliers l'un & l'autre, & inscrits chacun dans le même cercle.*



PROPOSITION IV.

* THÉORÊME.

551 *Le quarré du côté du pentagone régulier, est égal à la somme des quarrés des côtés de l'exagone régulier & du décagone régulier, qui seroient inscrits chacun dans le même cercle que ce pentagone.*

LE quarré du côté AB * du pentagone Fig. 12.
régulier ACE, est égal aux quarrés des côtés de l'exagone régulier & du décagone régulier, qui seroient inscrits chacun dans le même cercle G que ce pentagone.

Const. Divisez (n) l'arc AFB, en deux N. 261.
parties égales AF & FB; & l'arc FHB, aussi en deux parties égales FH & HB. Tirez ensuite, du centre G aux points A, F, H & B, les lignes droites GA, GF, GH & GB; & du point F aux points A, I & B, les lignes droites FA, FI & FB.

Démonst. L'angle AGB est de 72 degrés, puisqu'il a pour mesure l'arc AFB
(n), qui est la cinquieme partie de la N. 37.
circonférence [H]. Ainsi, puisque le triangle AGB est isoscele [C], l'angle GBA
est de 54 degrés (n). Or, l'angle AGH est N. 84.

aussi de 54 degrés, puisqu'il a aussi pour me-
N. 37. sure l'arc AFH (n) qui est les trois quarts de l'arc AFB [c]. Donc, puisque l'angle GAB est commun aux triangles AGB & AIG, ces deux triangles sont équiangles
N. 137. (n). Ainsi, AB . AG : : AG . AI (n). Par
N. 413. conséquent, le rectangle de AB & de AI
N. 433. est égal au quarré de AG (n).

Pareillement. Le rayon GH est perpen-
N. 228. diculaire à la corde BF (n); puisqu'il la divise en deux parties égales [c]. Ainsi, la ligne FI est égale à la ligne IB; & par conséquent, le triangle BIF est isoscele. Or, le triangle AFB l'est aussi, puisque
N. 260. les côtés AF & FB sont égaux (n). Donc, puisque l'angle IBF est commun à ces deux
N. 137. triangles, ils sont équiangles (n). Ainsi,
N. 413. AB . FB : : FB . IB (n); & par consé-
N. 433. quent (n), le rectangle de AB & de IB est égal au quarré de FB.

Donc, la somme des rectangles faits, l'un du côté AB & de la partie AI, & l'autre du même côté AB & de la partie IB, est égale à celle des quarrés des lignes AG & FB. Mais, cette premiere somme est la même chose que le quarré du côté
N. 182. AB (n); puisque les lignes AI & IB sont toutes les parties de ce côté: & les lignes AG & & FB sont les côtés, l'une de l'exa-
N. 310. gone régulier (n), & l'autre [c] du déca-

gone régulier, qui ſeroient inſcrits chacun dans le cercle G. Donc, le quarré du côté AB eſt égal aux quarrés des côtés de l'exagone régulier & du décagone régulier, qui ſeroient inſcrits chacun dans le cercle G.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

USAGE.

552. *On déduit de cette propoſition, & du corollaire qui la précede, une ſolution du problême ſuivant, qui eſt beaucoup plus ſimple que celle que l'on a donnée au nº 298.*

Inſcrire un pentagone régulier, dans un cercle donné CFD *. Fig. 11.

CONST. *Tirez un diametre CD, à volonté. Elevez du centre E* (n) *la perpendiculaire EF à ce diametre. Diviſez le rayon CE, en deux parties égales CG & GE* (n). *Tirez du point G au point F, la ligne droite GF. Prenez ſur le diametre CD, la partie GH égale à cette ligne GF. Enfin, tirez du point F au point H, la ligne droite FH. Cette ligne eſt égale au côté du pentagone demandé.* N. 95. N. 93.

DÉMONST. *La ligne CH eſt diviſée en deux parties CE & EH, & le point G eſt le milieu de la partie CE* [c]. *Ainſi, le rectangle des lignes CH & EH, avec*

le quarré de la partie GE, est égal au
N. 190. *quarré de la ligne GH* (n). *Par conséquent, il l'est aussi à celui de la ligne GF; puisque les lignes GH & GF sont égales* [c].

Mais, les quarrés des lignes GE & EF sont aussi égaux au quarré de la même ligne
N. 171. *GF* (n). *Donc, le rectangle précédent, avec le quarré de la ligne GE, est égal*
N. 62. *aux quarrés des lignes GE & EF* (n). *Par conséquent, ce même rectangle est égal*
N. 64. *au quarré de la ligne EF* (n); *ou, ce qui est la même chose, à celui de la ligne CE*
N 35. (n).

N. 433. *Ainsi, CH. CE :: CE. EH* (n). *Donc, la ligne CH est divisée en moyenne & ex-*
N. 402. *trême raison au point E* (n). *Par conséquent, puisque la partie CE est le côté de l'exagone régulier inscrit dans le cercle CFD*
N. 310. (n), *la partie EH est celui du décagone ré-*
N. 550. *gulier inscrit dans le même cercle* (n).

Mais, la ligne EF est aussi le côté de ce
N. 310. *même exagone* (n). *Or, le quarré de la ligne FH est égal aux quarrés des lignes EF*
N. 171. *& EH* (n). *Donc, il est égal à ceux des côtés de l'exagone régulier & du décagone régulier, inscrits chacun dans le cercle CFD. Par conséquent, cette ligne FH est égale au côté du pentagone régulier inscrit aussi dans*
N. 551. *le même cercle* (n).

Donc, C. Q. F. F.

PROPOSITION V.

THÉORÊME.

553. *Deux pyramides qui ont le même point pour ſommet, & chacune pour baſe l'une des deux parties d'un même parallélogramme diviſé par ſa diagonale, ſont égales.*

LES pyramides AECB * & AECD, qui Fig. 3. ont le même point A pour ſommet, & les parties ECB & ECD du même parallélogramme BD pour baſes, ſont égales.

Conſt. Prenez ſur la ligne AB un point F, à volonté. Faites enſuite paſſer par ce point, un plan FH parallele à la baſe BD.

Démonſt. Les plans FH & BD ſont paralleles [C]. Ainſi, les lignes FG & BC qui ſont les communes ſections de ces plans & du plan BAC, ſont paralleles (n); de même que les lignes IH & ED, N. 525. qui ſont auſſi les communes ſections de ces mêmes plans & du plan EAD. Mais, les lignes BC & ED ſont auſſi paralleles; puiſque le quadrilatere BD eſt parallélogramme [H]. Donc, les lignes FG & IH ſont paralleles (n). N. 517.

Or, on démontre de la même maniere, que les lignes FI & GH ſont auſſi paralleles. Donc, le quadrilatere FH eſt auſſi parallélogramme. Par conſéquent, les triangles IGF & IGH, qui ſont les coupes des pyramides propoſées, ſont égaux (n).

N. 143. Mais, la même démonſtration ſubſiſte, par quelque endroit du ſolide ABD que l'on faſſe paſſer le plan FH. Donc, à quelque endroit que l'on coupe les pyramides AECB & AECD par un plan parallele à leurs baſes, les ſections ſont égales. Par conſéquent, ces pyramides le ſont auſſi.

Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION VII †.

THÉORÊME.

554. *Tout priſme triangulaire peut être diviſé en trois pyramides égales.*

Fig. 4. LE priſme triangulaire ACE * peut être diviſé en trois pyramides égales.

Conſt. Faites paſſer par les points A,

† On a fait de la ſixieme propoſition, le quatrieme corollaire de celle-ci.

F & D, un plan AFD; & par les points B, D & F, un plan BFD.

Démonst. Les pyramides FABD & FAED ont le même point F pour sommet, & leurs bases sont les parties ABD & AED du même parallélogramme EB [c]; ainsi, elles sont égales (n). Or, les N. 553.
pyramides FABD & FBCD sont aussi égales (n); puisqu'elles ont le même point N. 553.
D pour sommet, & que leurs bases sont les parties BAF & BCF du même parallélogramme AC [c]. Donc, les trois pyramides FABD, FAED & FBCD, sont égales (n). N. 62.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

555. Il suit de ce théorême, qu'*une pyramide triangulaire est le tiers d'un prisme de même hauteur qu'elle, & de même base.*

La pyramide ABCD * est le tiers d'un Fig. 5.
prisme de même hauteur qu'elle, & de même base.

Const. Supposez sur la base BCD, un prisme BM, qui soit de même hauteur que la pyramide proposée.

Démonst. La pyramide ABCD est une des trois pyramides égales en lesquelles

N. 554. on peut diviſer le priſme BM (n). Donc, elle eſt le tiers de ce priſme.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

556. Il ſuit de ce corollaire, qu'*une pyramide quelconque, eſt le tiers d'un priſme de même hauteur qu'elle, & de même baſe.*

Fig. 5. La pyramide, par exemple, EFHK *, eſt le tiers d'un priſme de même hauteur qu'elle, & de même baſe.

Conſt. Suppoſez ſur la baſe FHK, un priſme FS qui ſoit de même hauteur que la pyramide propoſée. Faites enſuite paſſer par les points G, L & Q, un plan LQ; par les points G, K & Q, un plan KQ; & par les points G, I & Q, un plan IQ. Faites auſſi paſſer par les points E, G & L, un plan EGL; par les points E, G & K, un plan EGK; enfin, par les points E, G & I, un plan EGI.

Démonſt. Les pyramides triangulaires ELFG, ELGK, EKGI & EIGH, ſont les tiers des priſmes triangulaires OLFG, RLGK, NKGI & QIGH, chacune de

N. 555. chacun (n). Donc, la pyramide EFHK, qui eſt la ſomme de toutes ces pyramides triangulaires, eſt auſſi le tiers du priſme FS, qui eſt la ſomme de tous ces priſmes triangulaires.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

557. Il ſuit de ce ſecond corollaire, & des nº 537 & 544, que *la ſolidité d'une pyramide quelconque, eſt égale au produit de la baſe de cette pyramide, multipliée par le tiers de ſa hauteur.*

COROLLAIRE IV.

558. Il ſuit encore de ce ſecond corollaire, que *les pyramides qui ont des hauteurs égales, ſont entr'elles comme leurs baſes.*

Les pyramides ABCD * & EFHK, dont les hauteurs ſont égales, ſont entre elles ce que la baſe BCD eſt à la baſe FHK. Fig. 5.

Conſt. Suppoſez ſur les baſes BCD & FHK, des priſmes BM & FS qui ſoient de même hauteur que les pyramides propoſées.

Démonſt. Puiſque les priſmes BM & FS ont des hauteurs égales [c], ils ſont entr'eux ce que la baſe BCD du premier eſt à la baſe FHK du ſecond (n). Or, les pyramides ABCD & EFHK ſont les tiers, l'une du priſme BM, & l'autre du priſme FS (n). Donc, elles ſont auſſi entr'elles N. 544. N. 556.

N. 359. ce que la base BCD est à la base FHK (n). Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE V.

559. Enfin, il suit de ce quatrieme corollaire, que *les pyramides qui ont des hauteurs égales & des bases égales, sont égales.*

PROPOSITION VIII.

THÉORÊME.

560. *Les pyramides semblables sont entre elles en rapport triplé de celui de leurs côtés pareils.*

Fig. 6. Les pyramides semblables ABCD * & EFGH, sont entr'elles en rapport triplé de celui de leurs côtés pareils; par exemple, de celui du côté BC au côté FG.

Const. Supposez sur la base BCD, un prisme quelconque BI, qui soit de même hauteur que la pyramide ABCD. Supposez aussi sur la base FGH, un prisme FK qui soit aussi de même hauteur que la pyramide EFGH; & équiangle au prisme BI.

Démonst. Les prismes BI & FK sont semblables; puisqu'ils sont équiangles,

& qu'ils ont les mêmes baſes & les mêmes hauteurs que les pyramides ABCD & EFGH [c], qui ſont ſemblables [H]. Ainſi, ces priſmes ſont entr'eux en rapport triplé de celui du côté BC au côté FG (n). N. 539.

Or, les pyramides ABCD & EFGH ſont les tiers, l'une du priſme BI, & l'autre du priſme FK (n). Donc, elles ſont N. 556.
auſſi entr'elles en rapport triplé de celui du côté BC au côté FG (n). N. 359.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION IX.

THÉORÊME.

561. *Les pyramides dont les ſolidités ſont égales, ont leurs baſes & leurs hauteurs réciproquement proportionnelles : & celles dont les baſes & les hauteurs ſont réciproquement proportionnelles, ont leurs ſolidités égales.*

PREMIÉREMENT. Si les pyramides ABCD * & EFGH ſont égales, la baſe Fig. 7.
BCD de la premiere eſt à la baſe FGH de la ſeconde, ce que la hauteur de la ſeconde eſt à celle de la premiere.

Conſt. Suppoſez ſur les baſes BCD & FGH, des priſmes BI & FK, dont les

hauteurs ſoient les mêmes que celles des pyramides propoſées.

Démonſt. Les priſmes BI & FK ſont triples, l'un de la pyramide ABCD, &
N. 556. l'autre de la pyramide EFGH (n). Donc,
N. 67. ils ſont égaux (n), puiſque ces pyramides ſont égales [H]. Par conſéquent, la baſe BCD du premier eſt à la baſe FGH du ſecond, ce que la hauteur du ſecond eſt à
N. 541. celle du premier (n).

Mais, ces baſes & ces hauteurs ſont les mêmes que celles des pyramides ABCD & EFGH [C]. Donc, la baſe BCD de la pyramide ABCD eſt à la baſe FGH de la pyramide EFGH, ce que la hauteur de cette derniere pyramide eſt à celle de la premiere.

Par conſéquent, C. Q. F. 1° D.

Fig. 7. SECONDEMENT. Si la baſe BCD * de la premiere pyramide eſt à la baſe FGH de la ſeconde, ce que la hauteur de la ſeconde eſt à celle de la premiere, ces pyramides ſont égales.

Conſt. La même que la précédente.

Démonſt. La baſe BCD du priſme BI eſt à la baſe FGH du priſme FK, ce que la hauteur de ce dernier priſme eſt à celle du premier; puiſque [C] ces baſes & ces hauteurs ſont les mêmes que celles des pyramides

pyramides ABCD & EFGH, qui ſont réciproquement proportionnelles [H]. Donc, ces priſmes ſont égaux (n). Par N. 541.
conſéquent, puiſque les pyramides ABCD & EFGH ſont les tiers de ces mêmes priſmes (n), elles ſont auſſi égales (n). N. 556. N. 68.

Donc, C. Q. F. 2° D.

PROPOSITION X.

THÉORÊME.

562. *Un cône eſt le tiers d'un cylindre de même hauteur que lui, & de même baſe.*

Le cône ABC * eſt le tiers du cylindre Fig. 8.
AE, de même hauteur que lui & de même baſe.

Démonſt. Une pyramide eſt terminée par autant de triangles, & un priſme eſt terminé par autant de parallélogrammes, que le polygone qui ſert de baſe à l'une ou à l'autre, a de côtés. Ainſi, ſi conformément à ce qui a été dit au n° 408, on conſidere le cercle AC comme étant un polygone d'un ſi grand nombre de côtés, que, même en rigueur, ce polygone ne differe plus de ce cercle; alors, le cône ABC & le cylindre AE deviennent, l'un

une pyramide & l'autre un prifme, qui ayant l'une & l'autre autant de faces que ce même polygone auroit de côtés, ne different point non plus, l'une de ce même cône, ni l'autre de ce même cylindre.

Or, une pyramide quelconque eft le tiers d'un prifme de même hauteur qu'elle,
N. 556. & de même bafe (n). Donc, puifque le cône ABC & le cylindre AE ont chacun & la même hauteur & la même bafe [H], ce cône eft auffi le tiers de ce cylindre.

Par conféquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

563. Il fuit de ce théorême & de fa démonftration, que *la folidité d'un cylindre eft égale au produit de la bafe de ce cylindre, multipliée par fa hauteur.* Par conféquent, *la folidité d'un cône eft égale au produit de la bafe de ce cône, multipliée par le tiers de fa hauteur.*



PROPOSITION XI.

THÉORÊME.

564. *Les cylindres dont les hauteurs ſont égales, ſont entr'eux comme leurs baſes: & il en eſt de même des cônes, lorſqu'ils ſont dans le même cas.*

DÉMONSTRATION.

SUIVANT ce que l'on vient de démontrer dans la propoſition précédente, les cylindres peuvent être pris pour des priſmes, & les cônes, pour des pyramides. Or, les priſmes qui ont des hauteurs égales, ſont entr'eux comme leurs baſes (n); N. 538.
& il en eſt de même des pyramides (n). N. 558.
Donc, lorſque les cylindres, ou les cônes, ont des hauteurs égales, ils ſont auſſi entr'eux comme leurs baſes.

Par conſéquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION XII.

THÉORÊME.

565. *Les cylindres ſemblables ſont entr'eux en rapport triplé de celui de leurs côtés pareils*, (par exemple), *de ceux des diametres de leurs baſes : & il en eſt de même des cônes ſemblables.*

DÉMONSTRATION.

LES cylindres peuvent être pris pour des priſmes ; & les cônes, pour des pyra-
N. 562. mides (n). Or, les priſmes ſemblables ſont entr'eux en rapport triplé de celui de leurs
N. 539. côtés pareils (n) ; & il en eſt de même
N. 560. des pyramides ſemblables (n). Donc, lorſque les cylindres, ou les cônes, ſont ſemblables, ils ſont auſſi entr'eux en rapport triplé de celui de leurs côtés pareils ; & par conſéquent, de celui des diametres de leurs baſes ; puiſque ces diametres ſont des côtés pareils de ces ſolides.

Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION XIII.

THÉORÊME.

566. *Si un cylindre est coupé par un plan parallele à sa base, les segmens du cylindre sont entr'eux comme les segmens de l'axe.*

Si le plan EF *, qui coupe le cylindre AC, est parallele à la base DC, les segmens AF & EC du cylindre, sont entr'eux comme les segmens HI & IG de l'axe HG. Fig. 9.

Const. Divisez le plus petit segment HI, en tel nombre de parties égales qu'il vous plaira ; par exemple, en deux parties égales HM & MI. Prenez ensuite sur le segment IG, une partie GK égale à la partie HM. Enfin, faites passer par les points M & K, des plans NO & PQ paralleles, chacun à la base DC.

Démonst. Les segmens AO, NF & PC, sont égaux (n). Ainsi, l'on démontre cette proposition, de la même maniere dont on a démontré la premiere du sixieme Livre, nº 405. N. 564.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XIV.

Théorême.

567. *Les cylindres dont les baſes ſont égales, ſont entr'eux comme leurs hauteurs: & il en eſt de même des cônes, lorſqu'ils ſont dans le même cas.*

Fig. 10. Premiérement. Les cylindres NB* & HF dont les baſes NO & HG ſont égales, ſont entr'eux, ce que la hauteur KP du premier eſt à la hauteur ML du dernier.

Conſt. Prolongez le cylindre NB, juſqu'à ce que la hauteur PI du prolongement NC, ſoit égale à la hauteur ML du cylindre HF.

Démonſt. Les cylindres HF & NC ſont
N. 564. égaux (n); puiſque [c] ils ont des hauteurs égales ML & PI, & des baſes égales HG & DC. Or, les cylindres NB & NC ſont entr'eux, ce que la hauteur KP eſt à la
N. 566. hauteur PI (n); puiſque ces cylindres ſont les ſegmens du cylindre AC [c]. Donc, les cylindres NB & HF ſont auſſi entr'eux, ce que la hauteur KP eſt à la hauteur PI,
N. 61. ou ML (n).

Par conſéquent, C. Q. F. 1° D.

SECONDEMENT. Les cônes NKO * & HMG dont les bafes NO & HG font égales, font entr'eux, ce que la hauteur KP du premier eft à la hauteur ML du dernier. Fig. 10.

Conft. Suppofez fur les bafes NO & HG, les cylindres NB & HF, qui aient les mêmes hauteurs que les cônes propofés.

Démonft. Les cylindres NB & HF font entr'eux, ce que la hauteur KP eft à la hauteur ML [D]; puifque les bafes NO & HG font égales [H]. Or, les cônes NKO & HMG font les tiers de ces cylindres, chacun de chacun (n). Donc, ils font N. 562. auffi entr'eux comme ces mêmes hauteurs (n). N. 559.

Par conféquent, C. Q. F. 2° D.



PROPOSITION XV.

THÉORÊME.

568. *Les cylindres, & de même les cônes, dont les solidités sont égales, ont leurs bases & leurs hauteurs réciproquement proportionnelles : & ceux dont les bases & les hauteurs sont réciproquement proportionnelles, ont leurs solidités égales.*

DÉMONSTRATION.

LES cylindres peuvent être pris pour des prismes ; & les cônes pour des pyramides
N. 562. (n). Ainsi, ce que l'on a demontré des prismes au nº 541, & des pyramides au nº 561, convient pareillement, l'un aux cylindres, & l'autre aux cônes.

Par conséquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION XVI.

THÉORÊME.

569. *La solidité d'une demi-sphere, est les deux tiers de celle du cylindre dans lequel cette demi-sphere est inscrite.*

LA demi-sphere ALB * est les deux tiers du cylindre AK dans lequel elle est inscrite. Fig. 2.

Const. Faites passer par l'axe HL, un plan quelconque AIKB. Prenez ensuite sur ce même axe un point *n*, à volonté; & faites aussi passer par ce point, un plan Q *s* M parallele à la base IRK. Enfin, tirez du centre H, au point *o* auquel la commune section QM de ces plans rencontre la surface de la demi-sphere, & aux extrémités I & K de la commune section du plan AIKB & de la base IRK, les lignes droites H*o*, HI & HK.

Démonst. Le triangle *o n* H est rectangle en *n* (n). Ainsi, le cercle qui a pour N. 527. rayon la ligne H *o*, est égal aux cercles dont les lignes *n o* & *n* H sont les rayons (n). Mais, les lignes *n* Q & H *o* sont N. 459. égales; puisque la même ligne AH est

N. 143. N. 488. égale à l'une (n) & à l'autre (n) : & les
N. 413. lignes *n p* & *n* H ſont auſſi égales (n) ; puiſque le triangle H *n p* eſt équiangle au
N. 137. triangle iſoſcele H L K (n). Donc, le cercle qui a pour rayon la ligne *n* Q, eſt égal aux cercles dont les lignes *n o* & *n p*
N. 61. ſont les rayons (n). Par conſéquent, puiſque ces trois cercles ſont les ſections, l'un du cylindre AK, l'autre de la demi-ſphere ALB, & le dernier, du cône IHK, la ſection de ce cylindre eſt égale à celles de cette demi-ſphere & de ce cône.

Or, la même démonſtration ſubſiſte, par quelque endroit du cylindre AK que l'on faſſe paſſer le plan Q *s* M. Donc, à quelque endroit que l'on coupe ce cylindre par un plan parallele à ſa baſe, ſa ſection eſt égale à celles de la demi-ſphere ALB & du cône IHK. Ainſi, cette demi-ſphere & ce cône valent enſemble ce cylindre. Par conſéquent, puiſque ce même
N. 562. cône eſt le tiers de ce même cylindre (n), cette demi-ſphere en eſt les deux tiers.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

570. Il ſuit de ce théorême, qu'*une ſphere eſt les deux tiers du cylindre dans lequel elle eſt inſcrite.*

COROLLAIRE II.

571. Il ſuit de ce corollaire, que *la ſolidité d'une ſphere, eſt égale au produit de la ſurface de l'un quelconque de ſes grands cercles, multipliée par les deux tiers de ſon diametre.*

PROPOSITION XVII.

THÉORÊME.

572. *Chaque grand cercle d'une ſphere, eſt égal au quart de la ſurface de cette même ſphere.*

DÉMONSTRATION.

On peut conſidérer une ſphere comme étant diviſée en un grand nombre de petits ſolides, qui aient chacun leur ſommet au centre de cette ſphere, & leur baſe dans ſa ſurface. Or, ſi l'on ſuppoſe dans une même ſphere un ſi grand nombre de ces ſolides, que la convexité de la baſe de chacun devienne abſolument inſenſible, ils feront autant de petites pyramides qui auront chacune le rayon de cette ſphere pour hauteur. Mais, pour avoir la ſolidité

de chacune de ces pyramides en particulier, il faut multiplier sa base par le tiers
N. 557. de ce rayon (n). Donc, pour avoir la solidité de toutes ensemble, qui est celle de la sphere même, il faut multiplier par le tiers de ce même rayon, la somme de toutes les bases ; c'est-à-dire, la surface même de la sphere.

Mais, puisque [D] l'on a la solidité d'une sphere, en multipliant sa surface par le tiers de son rayon ; on aura de même sa solidité, en multipliant le quart de cette même surface par le quadruple du tiers de ce même rayon ; c'est-à-dire, par les deux tiers du diametre.

Or, on a aussi la même solidité, en multipliant l'un des grands cercles de cette même sphere par les deux tiers du même
N. 571. diametre (n). Donc, ce grand cercle, & le quart de la surface de la sphere, sont deux surfaces égales.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

573. Il suit de ce théorême, que *la surface d'une sphere, est quadruple de celle de l'un quelconque des grands cercles de cette même sphere.*

COROLLAIRE II.

574. Il suit de ce corollaire, que *la surface d'une sphere, est égale à celle du cylindre dans lequel cette même sphere est inscrite.*

Démonst. La surface d'un cylindre est égale au produit de la circonférence de sa base, multipliée par sa hauteur. Or, le cylindre dans lequel une sphere est inscrite, a l'un des grands cercles de cette sphere pour base, & le diametre de ce même cercle pour hauteur (n). Ainsi, sa N. 61. surface est égale au produit de la circonférence de l'un de ces grands cercles, multipliée par son diametre.

Mais, la surface de ce grand cercle est égale au produit de cette même circonférence multipliée seulement par le quart de ce même diametre (n). Donc, la surface N. 409. de ce cylindre est quadruple de celle de ce grand cercle. Par conséquent, puisque la surface de la sphere en est aussi quadruple (n), la surface de ce cylindre & celle N. 573. de cette sphere sont égales (n). N. 67.

Donc, C. Q. F. D.



PROPOSITION XVIII.

THÉORÊME.

575. *Les spheres sont entr'elles en rapport triplé de celui de leurs diametres.*

DÉMONSTRATION.

LES spheres sont les deux tiers des cy-
N. 569. lindres dans lesquels elles sont inscrites (n).
Ainsi, elles ont entr'elles les mêmes rap-
N. 359. ports que ces cylindres (n). Or, ces cy-
N. 499. lindres sont semblables (n); & par con-
séquent, ils sont entr'eux en rapport triplé
N. 565. de celui de leurs axes (n). Donc, les
spheres sont aussi entr'elles en rapport tri-
plé de celui des axes des cylindres dans
lesquels elles sont inscrites. Par consé-
quent, puisque ces axes sont les diametres
de ces mêmes spheres, elles sont entre
elles en rapport triplé de celui de leurs
diametres.

Donc, C. Q. F. D.



PROPOSITION XIX.

** THÉORÊME.

576. *La ſolidité d'un Tétraſphéroïde* † *eſt les deux tiers de celle du parallélépipede dans lequel il eſt inſcrit.*

TOUT tétraſphéroïde eſt les deux tiers du parallélépipede dans lequel il eſt inſcrit.

Conſt. Tirez une ligne droite AD, à volonté. (*Livre 6, fig. 46.*) Décrivez ſur cette ligne un demi-cercle AMD. Circonſcrivez à ce demi-cercle un rectangle AC. Tirez du centre N aux points B & C, les lignes droites NB & NC. Elevez du même centre N (n), la perpendiculaire N. 95. NM à la ligne AD. Enfin, des points G & O pris à volonté ſur le côté AB, tirez (n) les paralleles GH & OP à la même N. 133. ligne AD.

Démonſt. Si l'on imagine que le parallélépipede circonſcrit à un tétraſphéroïde ſoit coupé par trois plans, dont le

† Je donne le nom de *Tétraſphéroïde* à un ſolide qui a pour baſe le quarré du diametre d'un cercle; & dont toutes les ſections paralleles à cette baſe ſont les quarrés des cordes de ce même cercle.

premier paſſe par l'axe MN de ce tétraſphéroïde, & dont les deux autres ſoient paralleles à la baſe de ce parallélépipede, on aura le rectangle AC pour la ſection de ce même parallélépipede ; le demi-cercle AMD, pour celle de ce tétraſphéroïde ; & le triangle BNC, pour celle d'une pyramide qui ſeroit inſcrite dans ce même parallélépipede. Les lignes droites GH & OP ſeront les communes ſections de ces trois plans. Cela poſé :

La ligne EH eſt diviſée en deux parties au point F, & le point L eſt le milieu de
N. 228. ſa partie EF (n). Ainſi, le rectangle de cette ligne & de ſa partie FH, avec le quarré de la partie LF, eſt égal au quarré
N. 190. de la ligne LH (n). Or, ce rectangle eſt
N. 270. égal au quarré de la tangente HD (n) ; & le quarré de cette tangente l'eſt à celui de la ligne LK : car, puiſque le triangle NLK eſt équiangle au triangle NMC qui eſt iſoſcele [c], la ligne LK eſt égale à
N. 413. la ligne LN (n) ; & cette derniere ligne
N. 143. l'eſt à la tangente HD (n). Donc, le quarré de la ligne LK, avec celui de la ligne LF, eſt égal au quarré de la ligne LH.

Mais, ces trois lignes LK, LF & LH ne ſont que les moitiés des trois lignes IK, EF & GH, chacune de chacune [c].

Donc, les quarrés de ces trois dernieres lignes ſont quadruples de ceux des trois premieres, chacun de chacun (n). Par N. 185. conſéquent, le quarré de la ligne IK, avec celui de la ligne EF, eſt égal à celui de la ligne GH.

Or, le quarré de la ligne IK, eſt la ſection de la pyramide BNC †; celui de la ligne EF, eſt la ſection du tétraſphéroïde AMD; & celui de la ligne GH, eſt la ſection du parallélépipede AC. Donc, la ſection de la pyramide BNC, avec celle du tétraſphéroïde AMD, eſt égale à la ſection du parallélépipede AC.

Enfin, la même démonſtration ſubſiſte, par quelque endroit du parallélépipede AC que paſſe un plan GH parallele à ſa baſe AD. Donc, la pyramide BNC, avec le tétraſphéroïde AMD, eſt égale au parallélépipede circonſcrit AC. Par conſéquent, puiſque cette pyramide eſt le tiers de ce parallélépipede (n), ce tétraſphé- N. 556. roïde en eſt les deux tiers.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

577. Il ſuit de la démonſtration de ce

† Pour éviter une figure trop compliquée, nous indiquons par leurs ſections la pyramide, le tétraſphéroïde & le parallélépipede.

théorême, premiérement, que *la ſolidité* Fig. 46, Livre 6. *d'une partie AEFD* d'un tétraſphéroïde AMD, compriſe entre ſa baſe & le quarré de EF parallele à cette baſe, avec la ſolidité d'une pyramide INK, dont le côté IK du quarré de la baſe eſt double de l'axe LN, eſt égale à la ſolidité du parallélépipede correſpondant AGHD.*

Secondement, que *la ſolidité d'une partie EQRF d'un tétraſphéroïde AMD, compriſe entre les quarrés de EF & de QR paralleles à ſa baſe, avec la ſolidité d'une pyramide tronquée ISTK, dont les côtés IK & ST des quarrés des deux baſes ſont doubles des axes LN & VN des pyramides entieres INK & SNT, chacun de chacun, eſt égale à la ſolidité du parallélépipede correſpondant GOPH.*

Troiſiémement enfin, que *la ſolidité d'une partie QMR d'un tétraſphéroïde AMD, compriſe entre ſon ſommet M & le quarré de QR parallele à la baſe, avec la ſolidité d'une pyramide tronquée SBCT, dont les côtés ST & BC des quarrés des deux baſes ſont doubles des axes VN & MN des pyramides entieres SNT & BNC, chacun de chacun, eſt égale à la ſolidité du parallélépipede correſpondant OBCP.*

Donc, C. Q. F. D.

SCHOLIE.

578. *Puisque les cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diametres* (n), *tout ce que l'on vient de démontrer du tétra-sphéroïde convient pareillement à la sphere.* N. 547.

Ainsi, dans la même fig. 46 du Livre 6, si l'on prend le rectangle AC pour la section d'un cylindre dans lequel une demi-sphere seroit inscrite; le demi-cercle AMD pour la section de cette demi-sphere; & le triangle BNC pour celle d'un cône inscrit dans ce même cylindre; on verra, par une démonstration pareille à celle du théorême précédent, premiérement, que la solidité d'une demi-sphere AMD, avec celle d'un cône BNC, dont l'axe MN & le rayon MC du cercle de la base sont égaux, est égale à celle du cylindre circonscrit AC. *Par conséquent*, une sphere est les deux tiers du cylindre dans lequel elle est inscrite.

Secondement, que la solidité d'un segment de sphere AEFD, compris entre un grand cercle & un petit cercle dont les lignes ND & LF sont les rayons, avec celle d'un cône INK dont l'axe LN & le rayon LK du cercle de la base sont égaux, est égale à celle du cylindre correspondant AGHD.

Troisiémement, *que* la solidité d'un segment de sphere EQRF, compris entre deux petits cercles dont les lignes LF & VR sont les rayons, avec celle d'un cône tronqué ISTK, compris entre les deux cercles dont les rayons LK & VT sont égaux aux axes LN & VN des cônes entiers INK & SNT, chacun à chacun, est égale à celle du cylindre correspondant GOPH.

Quatriémement enfin, *que* la solidité d'une calotte QMR, avec celle d'un cône tronqué SBCT, compris entre le petit cercle & le grand cercle dont les rayons VT & MC sont égaux aux axes VN & & MN des cônes entiers SNT & BNC, est égale à celle du cylindre correspondant OBCP.

Fin des Elémens d'Euclide.

DES PROPORTIONS ARITHMÉTIQUES †.

DÉFINITIONS.

579. ON dit que des rapports arithmétiques ſont *égaux*, ou ſont les *mêmes*; lorſque les différences de leurs termes ſont égales.

Par exemple, le rapport arithmétique d'une ligne de 12 *pieds à une ligne de* 15 *pieds, eſt égal à celui d'une ligne de* 18 *pieds à une ligne de* 21 *pieds; parce que la* différence 3 *de* 12 *à* 15, *eſt la même que celle de* 18 *à* 21.

Pareillement, le rapport arithmétique d'une ligne de 6 *pieds à une ligne de* 4 *pieds, eſt égal à celui d'une ligne de* 11 *pieds à une ligne de* 9 *pieds; parce que la* différence 0—2 *de* 6 *à* 4 (n), *eſt la même* N. 316.
que celle de 11 *à* 9.

SCHOLIE.

580. *Pour marquer que des rapports arithmétiques ſont égaux, tels que le ſont, par*

† Euclide n'a rien dit des proportions arithmétiques

exemple ceux de 5 à 11, de 14 à 20, de 27 à 33, &c., on les ſépare les uns des autres par trois points rangés en triangle, de cette maniere, 5 . 11 ∴ 14 . 20 ∴ 27 . 33 ∴ &c.

Et pour exprimer cette égalité, on dit, que 5 ſont arithmétiquement à 11, ce que 14 ſont à 20, ce que 27 ſont à 33, &c.

Mais, lorſque la proportion arithmétique eſt continue, telle que l'eſt, par exemple celle-ci, 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . &c., on la fait précéder par une petite ligne entre trois points, de cette maniere, ∻ 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . &c.

PROPOSITION I.

THÉORÊME.

581. *Si quatre quantités ſont en proportion arithmétique, la ſomme des extrêmes eſt égale à celle des moyennes.*

SI $a . b$ ∴ $c . d$, la ſomme $a + d$ des extrêmes, eſt égale à la ſomme $b + c$ des moyennes.

Démonſt. Puiſque [H], $a . b$ ∴ $c . d$, N. 579. ſi b eſt égal à a, c l'eſt à d (n). Ainſi, a fait avec d, la même ſomme que b avec c.

Et ſi au contraire b ſurpaſſe a, ou en

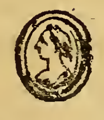
differe d'une certaine quantité, alors (n), c differe de *d*, ou le furpaffe, de la même quantité. Ainfi, *a* fait toujours avec *d* la même fomme que *b* avec *c*. Donc, $a + d$ eft toujours égal à $b + c$. N. 579.

Par conféquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

582. Il fuit de ce théorême, premiérement, que *pour trouver le quatrieme terme d'une proportion arithmétique dont les trois premiers termes font donnés; il faut de la fomme des moyens fouftraire le premier terme. Le refte eft le quatrieme terme demandé.*

Secondement, que *fi trois quantités font en progreffion arithmétique, la fomme des extrêmes eft le double du terme moyen.*



PROPOSITION II.

THÉORÊME.

583. *Si quatre quantités ſont telles que la ſomme des extrêmes ſoit égale à celle des moyennes, ces quatre quantités ſont en proportion arithmétique.*

SI les quantités a, b, c & d, ſont telles que la ſomme $a+d$ des extrêmes, ſoit égale à la ſomme $b+c$ des moyennes, le rapport arithmétique de a à b, eſt le même que celui de c à d.

Démonſt. Puiſque [H], a fait avec d la même ſomme que b fait avec c, ſi b eſt
N. 579. égal à a, c l'eſt à d. Ainſi, $a \,.\, b \,\cdot\!\cdot\, c \,.\, d$ (n).

Mais ſi b ſurpaſſe a, ou en differe, d'une certaine quantité, il faut alors que c differe de d, ou le ſurpaſſe, de la même quantité; puiſque autrement, b ne feroit plus avec c la même ſomme que a fait avec d. Donc, la différence de a à b eſt la même que celle de c à d. Par conſéquent, $a \,.\, b \,\cdot\!\cdot$
N. 579. $c \,.\, d$ (n).

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

584. Il ſuit de ce théorême, que *ſi trois*

trois quantités sont telles que la somme des extrêmes soit double de la quantité moyenne, ces trois quantités sont en progression arithmétique.

Par conséquent, *la moitié de la somme de deux quantités quelconques, est moyenne proportionnelle arithmétique entre ces deux quantités.*

PROPOSITION III.

THÉORÊME.

585. *Dans une progression arithmétique, le second terme est égal au premier, plus une fois la différence qui regne dans cette progression : le troisieme terme est égal au premier, plus deux fois cette différence : le quatrieme terme est égal au premier, plus trois fois cette même différence : & ainsi de suite.*

DANS cette progression, ÷ *a*. *b* . *c* . *d* . *e* . *f*. *g*. &c., le second terme *b* est égal au premier terme *a*, plus une fois la différence : le troisieme terme *c* est égal au premier terme *a*, plus deux fois la différence : le quatrieme terme *d* est égal au premier terme *a*, plus trois fois la différence : & ainsi de suite.

La progreſſion dont il s'agit eſt croiſſante, *ou* décroiſſante ; *c'eſt-à-dire que la différence qui y regne eſt* poſitive, *ou* négative.

Premiérement. *Lorſque la différence eſt poſitive.*

Démonſt. Puiſque la différence eſt poſitive [H], a eſt plus petit que b d'une certaine quantité x. Ainſi, en ajoutant à a cette quantité x dont il differe de b, la ſomme $a + x$ eſt égale à b. Par conſéquent, on peut mettre cette ſomme à la place du ſecond terme b.

De même, en ajoutant à b, c'eſt-à-dire à $a + x$, la même quantité x dont il differe de c, la ſomme $a + 2x$ eſt égale à c. Ainſi, l'on peut mettre cette ſomme à la place du troiſieme terme c.

Pareillement, en ajoutant à c, c'eſt-à-dire à $a + 2x$, cette même quantité x dont il differe de d, la ſomme $a + 3x$ eſt égale à d. Ainſi, on peut la mettre à la place du quatrieme terme d. Et ainſi de ſuite.

Donc, cette même progreſſion $\div a . b . c . d . e . f . g .$ &c. peut être exprimée de la maniere ſuivante, $\div a . a+x . a+2x . a+3x . a+4x . a+5x .$ &c.

Or, $a + x$ eſt le premier terme a, plus une fois la différence x : $a + 2x$ eſt le premier terme a, plus deux fois la différence x : &c.

Secondement. *Lorſque la différence eſt négative.*

Démonſt. Puiſque la différence eſt négative [H], a eſt plus grand que b d'une certaine quantité x. Ainſi, en ſouſtrayant de a cette quantité x dont il ſurpaſſe b, le reſte $a - x$ eſt égal à b. Par conſéquent, on peut mettre ce reſte à la place du ſecond terme b.

De même, en ſouſtrayant de b, c'eſt-à-dire de $a - x$, la même quantité x dont il ſurpaſſe c, le reſte $a - 2x$ eſt égal à c. Ainſi, l'on peut mettre ce reſte à la place du troiſieme terme c.

Pareillement, en ſouſtrayant de c, c'eſt-à-dire de $a - 2x$, cette même quantité x dont il ſurpaſſe d, le reſte $a - 3x$ eſt égal à d. Ainſi, on peut le mettre à la place du quatrieme terme d. Et ainſi de ſuite.

Donc, cette même progreſſion, $\div\, a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \,.\, f \,.\, g$. &c. peut être exprimée de la maniere ſuivante, $\div\, a \,.\, a - x \,.\, a - 2x \,.\, a - 3x \,.\, a - 4x \,.\, a - 5x$. &c.

Or, $a - x$ eſt le premier terme a, plus une fois la différence négative x : $a - 2x$ eſt le premier terme a, plus deux fois la différence négative x : &c.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION IV.

THÉORÊME.

586. *Dans une progreſſion arithmétique, la ſomme de tous les termes eſt égale au produit de celle des extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes.*

La ſomme $a+b+c+$ &c. de tous les termes de cette progreſſion, $\div a . b . c . d . e . f . g . h . i . k$. qui a 10 termes, eſt égale au produit $5a+5k$ de la ſomme des extrêmes a & k, multipliée par la moitié 5 du nombre des termes.

Démonſt. Dans une progreſſion arithmétique, la différence de chaque terme à celui qui le ſuit immédiatement, eſt tou-
N. 579. jours la même (n). Ainſi, puiſque la progreſſion dont il s'agit a 10 termes, elle donne ces quatre proportions $a . b \cdot\!\cdot\!\cdot i . k$, $b . c \cdot\!\cdot\!\cdot h . i$, $c . d \cdot\!\cdot\!\cdot g . h$ & $d . e \cdot\!\cdot\!\cdot f . g$.
N. 581. Donc (n), $a+k$ eſt égal à $b+i$, $b+i$ l'eſt à $c+h$, $c+h$ l'eſt à $d+g$, & $d+g$ l'eſt à $e+f$. Par conſéquent, ces cinq ſommes $a+k$, $b+i$, $c+h$, $d+g$ &
N. 62. $e+f$, ſont cinq quantités égales (n).

Mais, puiſque ces cinq quantités ſont égales, elles ſont chacune la cinquieme

partie de leur somme. Ainsi, leur somme est également $5a + 5k$, comme $5b + 5i$, comme, &c. Donc, &c.

Or, quel que soit le nombre des termes d'une progression arithmétique, on démontrera toujours la même propriété, par un pareil raisonnement.

Donc, C. Q. F. D.

USAGES

des Progressions arithmétiques.

QUESTION Iere.

587. *Un Seigneur voulant faire construire un mur autour de son parc, on n'en fit que 5 toises la premiere semaine. Mais le nombre des travailleurs étant successivement augmenté, on fait chaque semaine suivante 8 toises de plus que la semaine précédente. Combien de toises fera-t-on la 27e semaine? & combien y en aura-t-il de faites à la fin de la 26e semaine?*

SOLUTION. Le premier des deux nombres demandés, est le 27e terme d'une progression arithmétique qui a 5 pour premier terme, & 8 pour différence. Or (n), ce 27e terme est égal au premier terme 5, plus 26 fois la différence 8. Ainsi, l'on multiplie 8 par 26; on ajoute ensuite 5 au pro- N. 585.

duit 208 ; & la ſomme 213 eſt le premier nombre demandé.

Le ſecond des deux mêmes nombres demandés, eſt la ſomme de tous les termes d'une progreſſion arithmétique qui a 5 pour premier terme, 8 pour différence, & 26
N. 586. pour nombre des termes. Or (n), cette ſomme eſt égale au produit de celle des extrêmes, multipliée par la moitié 13 du nombre des termes. Ainſi, l'on cherche
N. 585. (n) le 26e terme 205 ; on lui ajoute 5 ; on multiplie enſuite par 13 la ſomme 210 ; & le produit 2730 eſt le ſecond nombre demandé.

Donc, C. Q. F. F.

QUESTION II.

588. *Il faut diſtribuer* 12000 *livres à* 20 *perſonnes ; de maniere que la ſeconde ait* 12 *liv. de plus que la premiere ; la troiſieme,* 12 *liv. de plus que la ſeconde ; & ainſi de ſuite. Combien faut-il donner à la premiere ; & à chacune des autres ?*

SOLUTION. Le premier des nombres demandés eſt le premier terme d'une progreſſion arithmétique dont 12000 ſont la ſomme de tous les termes, 20 le nombre
N. 586. des termes, & 12 la différence. Or (n), cette ſomme 12000 eſt égale au produit de celle des extrêmes, multipliée par la

moitié 10 du nombre des termes. Ainſi, l'on diviſe 12000 par 10, & le quotient 1200 eſt la ſomme des extrêmes.

Mais (n), cette ſomme 1200 eſt égale à deux fois le premier terme, plus 19 fois la différence 12. Donc, après avoir multiplié 12 par 19, on ſouſtrait de 1200 le produit 228; & la moitié 486 du reſte, eſt le premier des nombres demandés. N. 585.

A l'égard des autres nombres demandés, ils ſont les termes d'une progreſſion arithmétique qui a 486 pour premier terme, & 12 pour différence. Ainſi (n), on ajoute 12 au premier terme, & la ſomme 498 eſt le ſecond terme: on ajoute enſuite 12 au ſecond terme, & la ſomme 510 eſt le troiſieme terme. Et ainſi de ſuite, pour trouver les autres termes. N. 585.

Donc, C. Q. F. F.

QUESTION III.

589. *On a fait creuſer un puits de 18 pieds de profondeur. L'ouvrier qui a commencé le travail l'a quitté après en avoir fait* 10 *pieds. Ainſi, un autre a creuſé les* 8 *pieds qui reſtoient à faire. L'ouvrage étant fini, on l'a eſtimé* 150 *livres. Quelle part de cette ſomme chaque ouvrier doit-il avoir?*

SOLUTION. La peine de remuer la terre a été la même pour le premier ouvrier

comme pour le ſecond. Mais, à meſure que l'endroit d'où l'on a enlevé les terres eſt devenu plus profond, on a été obligé de les monter de plus bas. Si pour enlever les terres du premier pied de profondeur on a deſcendu de 1 pied, & remonté par conſéquent de 1 pied; pour enlever les terres du ſecond pied de profondeur, il a fallu deſcendre de 2 pieds, & remonter par conſéquent de 2 pieds; & ainſi de ſuite. Donc, les différens eſpaces que l'on a parcourus pour faire ces enlevemens, forment une progreſſion arithmétique qui a 2 pour premier terme, 2 auſſi pour différence, & 18 pour nombre des termes.

N. 536. Ainſi, l'on cherche (n) la ſomme 342 de tous les termes; & la ſomme 110 des
N. 364 10 premiers. On cherche enſuite (n) le quatrieme terme d'une proportion géométrique dont les trois premiers termes ſont 342, 110 & 150; & l'on trouve 48 ₶ 4 ſ 10 $\frac{18}{19}$ ₰ pour la part du premier ouvrier. Par conſéquent, celle du ſecond doit être 101 ₶ 15 ſ 1 $\frac{1}{19}$ ₰.

Donc, C. Q. F. F.

QUESTION IV.

590. *On a payé en progreſſion arithmétique* 15000 *liv. à un certain nombre de perſonnes. La premiere a reçu pour ſa part*

408 *livres, & la derniere* 792 *livres. Quel est le nombre de ces personnes? & de combien chaque paiement a-t-il augmenté?*

SOLUTION. Le premier des deux nombres demandés, est celui des termes d'une progression arithmétique dont 15000 sont la somme de tous les termes; & dont 408 & 792 sont les extrêmes. Or (n), cette somme 15000 est égale au produit de celle des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes. Ainsi, l'on divise 15000 par la somme 1200 de ces deux extrêmes; & le quotient 12 $\frac{1}{2}$ est la moitié du nombre des termes. Par conséquent, 25 sont le premier nombre demandé. N. 586.

Le second des deux mêmes nombres demandés, est la différence d'une progression arithmétique dont 408 sont le premier terme, 792 le dernier, & 25 le nombre des termes. Or (n), ce dernier terme 792 est égal au premier terme 408, plus 24 fois la différence. Ainsi, après avoir soustrait 408 de 792, on divise par 24 le reste 384; & le quotient 16 est le second nombre demandé. N. 585.

Donc, C. Q. F. F.

QUESTION V.

591. *Une Compagnie est assise à 6 toises de distance du bout d'une allée dont les ar-*

bres sont éloignés de 3 toises, chacun de chacun. Un jeune homme de cette même Compagnie parie 100 *louis qu'en moins de deux heures, il les portera tous l'un après l'autre au pied de chaque arbre. Devoit-il faire ce pari ?*

SOLUTION. Puisque l'endroit d'où il faudroit porter les louis est éloigné de 6 toises du bout de l'allée, le parieur parcouroit 6 toises pour porter le premier louis au pied du premier arbre, & les 6 mêmes toises pour venir prendre le second louis. Ainsi, il auroit 12 toises à parcourir pour le premier louis.

Pour porter le second louis à 3 toises plus loin que le premier, il faudroit parcourir 9 toises, & les 9 mêmes toises pour venir prendre le troisieme louis. Ainsi, le parieur auroit 18 toises à parcourir pour le second louis. Ce qui feroit 6 toises de plus que pour le premier.

Par la même raison, pour porter le troisieme louis & venir prendre le quatrieme, il faudroit parcourir 6 toises de plus que pour le second. Et ainsi de suite.

La question se réduit donc à trouver la somme de tous les termes d'une progression arithmétique qui auroit 12 pour premier terme, 6 pour différence, & 100 pour nombre des termes.

Ainsi, l'on commence par chercher (n) le centieme terme 606 ; & on lui ajoute 12. On multiplie ensuite la somme 618 par la moitié 50 du nombre des termes. Le produit 30900 est (n) la somme demandée ; & par conséquent, le nombre des toises qu'il auroit fallu parcourir pour gagner les 100 louis du pari. N. 585. N. 586.

Or, 30900 toises sont presque 15 lieues de 2500 pas chacune ; ou 13 lieues & demie, de 2287 toises chacune.

Donc, C. Q. F. F.

QUESTION VI.

592. *On a prêté* 100 *louis à un particulier, aux conditions que dans* 15 *jours il rendroit* 1 *louis ; que* 15 *jours après il rendroit* 3 *louis ; que* 15 *autres jours après, il rendroit* 5 *louis ; & ainsi de suite. En combien de quinzaines rendra-t-il les* 100 *louis?*

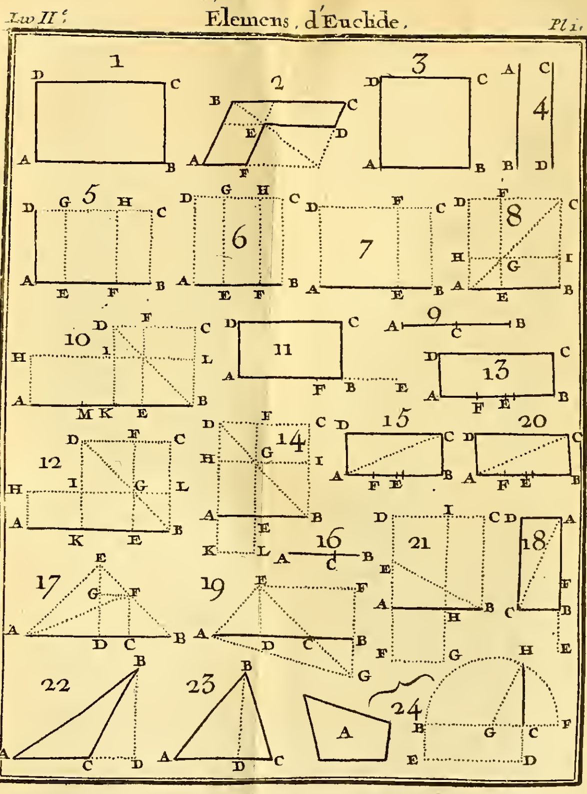
SOLUTION. Le nombre demandé est celui des termes d'une progression arithmétique qui a 100 pour somme de tous ses termes, 1 pour premier terme, & 2 pour différence. Or (n), cette somme 100 est égale au produit de celle des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes. Mais, on ne connoît ni cette somme des extrêmes, ni cette moitié du nombre des termes. N. 586.

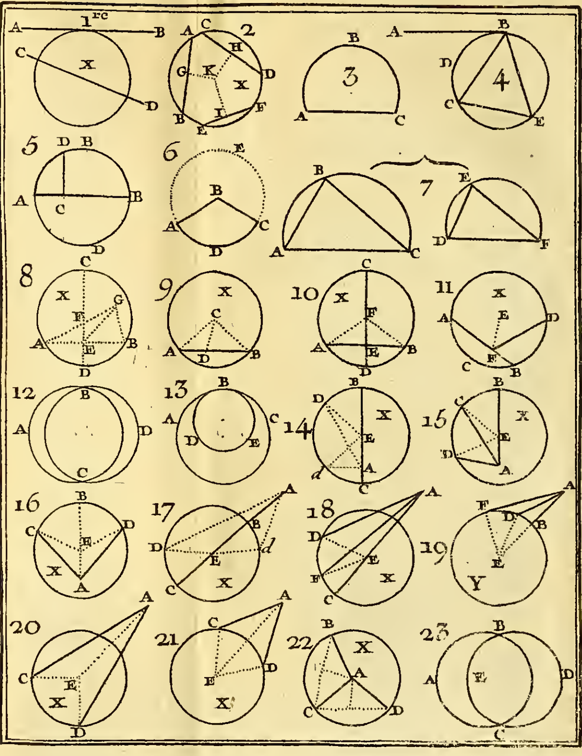
Dans cette circonſtance, on repréſente par une lettre quelconque, par exemple par la lettre x, le nombre des termes demandé.

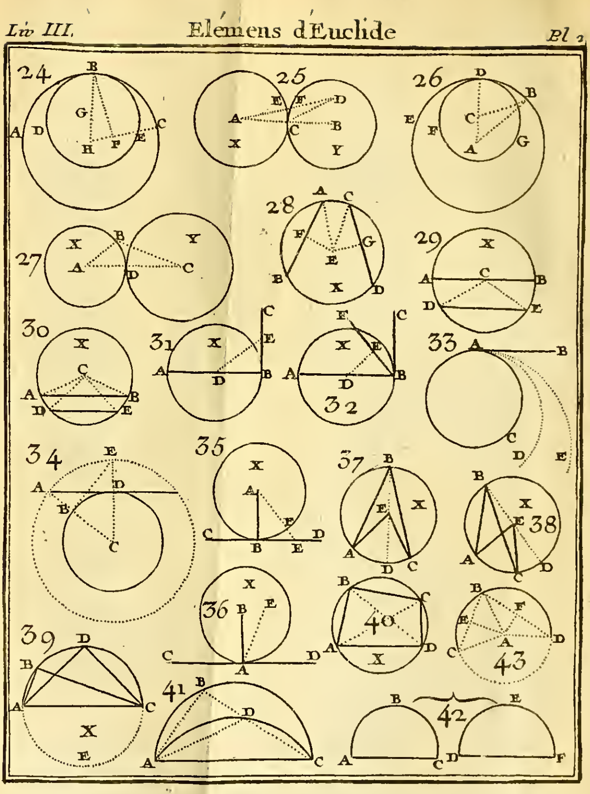
Or, ſi la lettre x repréſente le nombre des termes, $x-1$ repréſentera le quantieme du terme qui précéde le dernier. Ainſi, après avoir multiplié par $x-1$ la différence 2, on ajoute le premier terme 1 au pro-
N. 585. duit $2x-2$; & la ſomme $2x-1$ repréſente le dernier terme (n). A ce dernier terme $2x-1$ on ajoute le premier terme 1, & la ſomme $2x$ repréſente la ſomme des extrêmes. Enfin, on multiplie cette ſomme $2x$ par $\frac{x}{2}$ qui repréſente la moitié du nombre des termes; & le produit $\frac{2xx}{2}$, c'eſt-à-
N. 586. dire xx, repréſente la ſomme 100 de tous les termes (n). Or, xx indique le produit de x multiplié par lui-même. Donc, 100 ſont le produit du nombre des termes multiplié auſſi par lui-même. Par conſéquent, la racine quarrée 10 du nombre 100, eſt celui des quinzaines demandé.

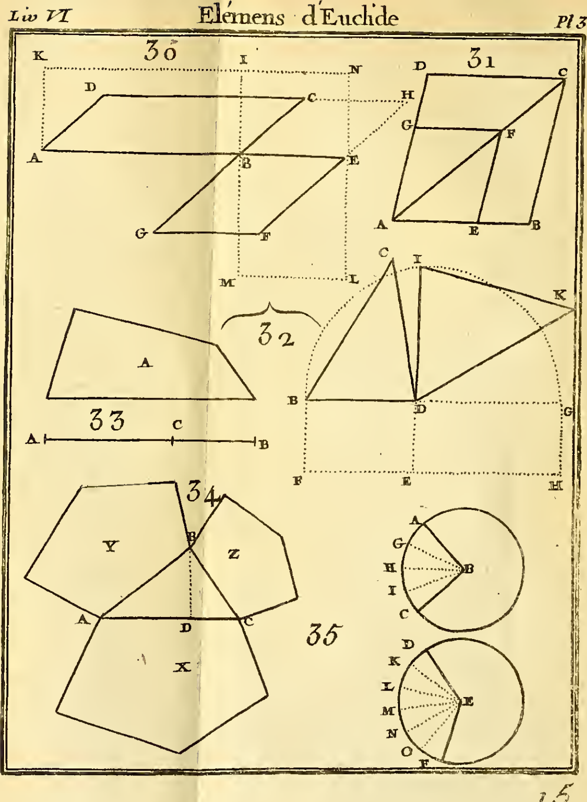
Donc, C. Q. F. F.

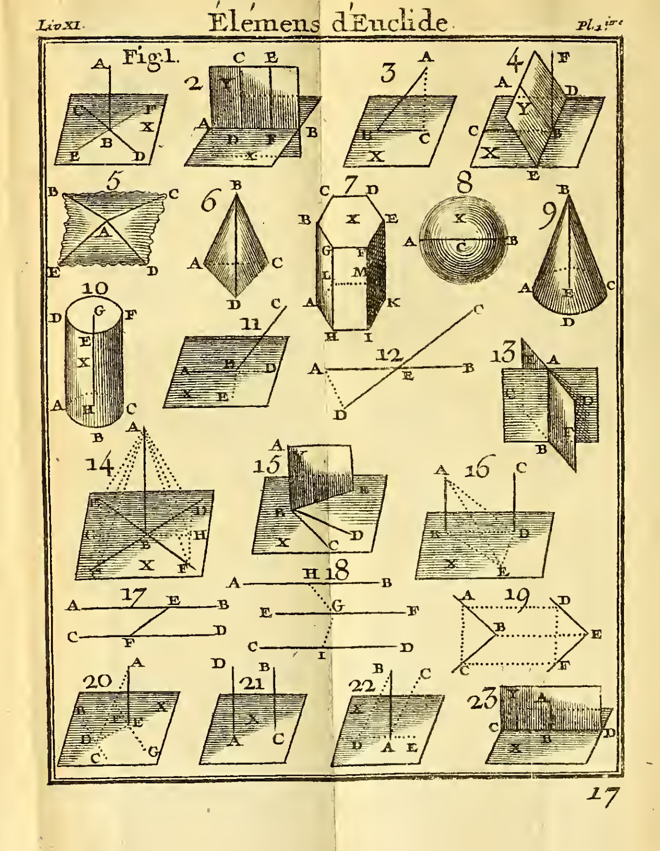
FIN.

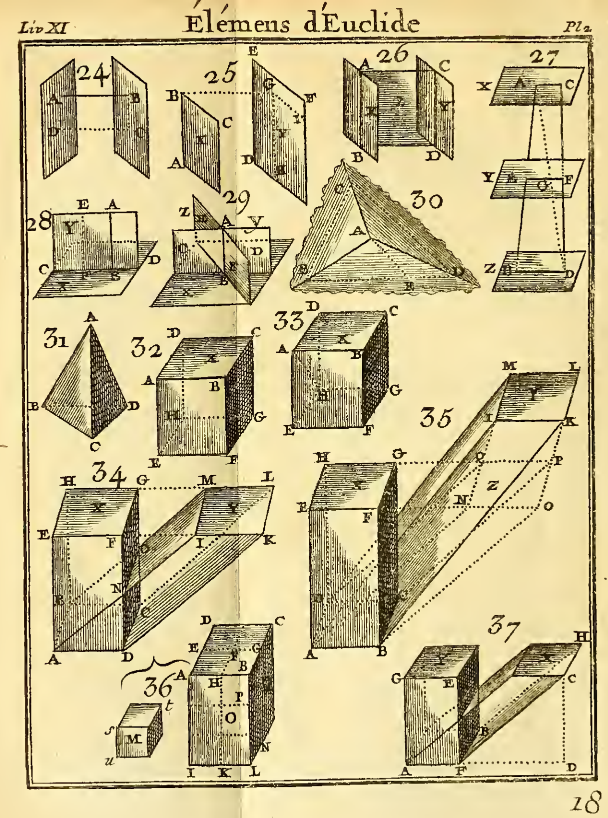

Liv. IIe.
Élemens, d'Euclide.
Pl. 1.
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24

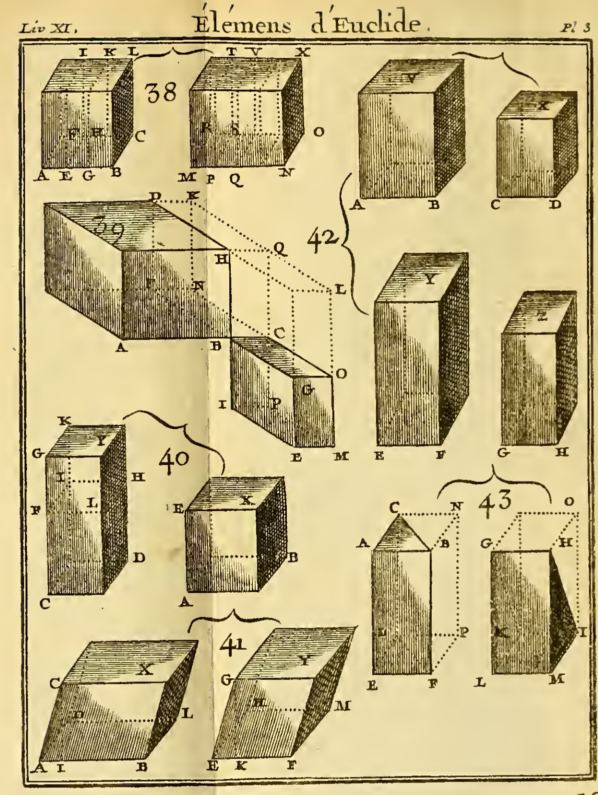

1re
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23

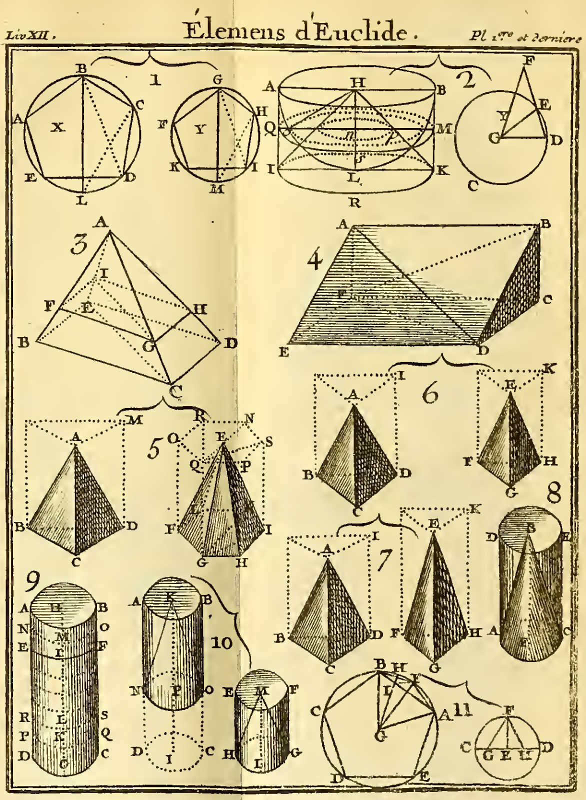

24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43

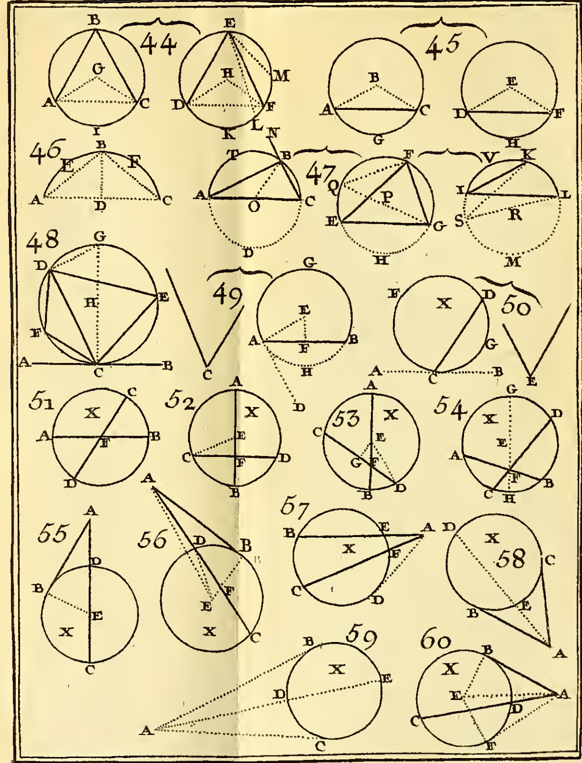

30
K I N D C H A B E G F M L
31
D C H G F A E B
32
C I K B D G F E H
A
33
A C B
34
Y B Z A D C X
35
A G H I B C
D K L M E N O F

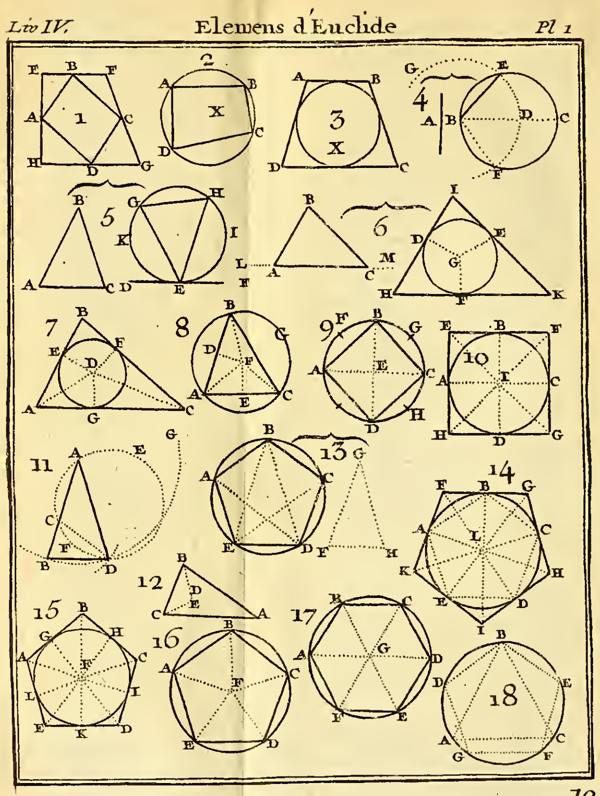

Fig.1.
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23

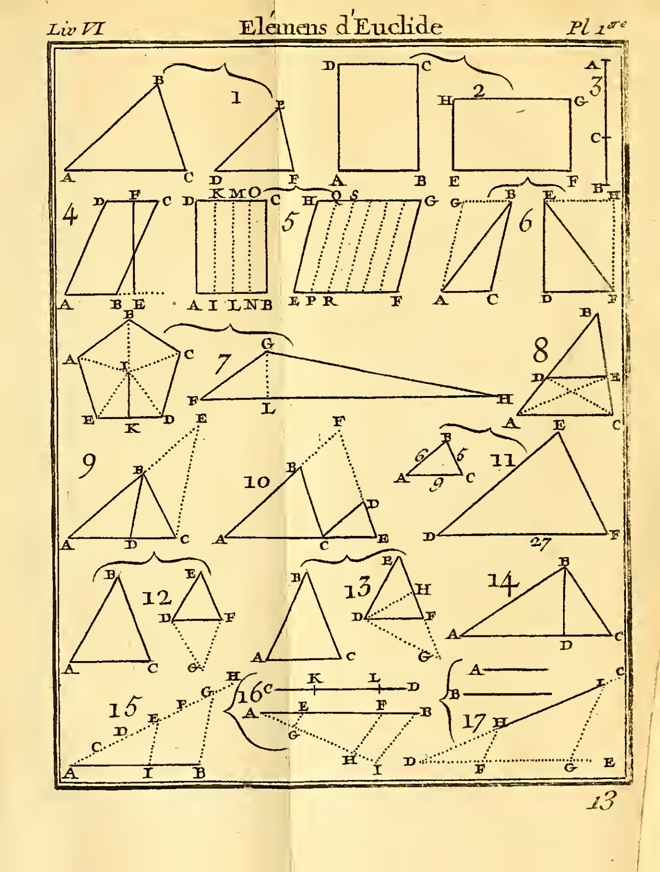

24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37

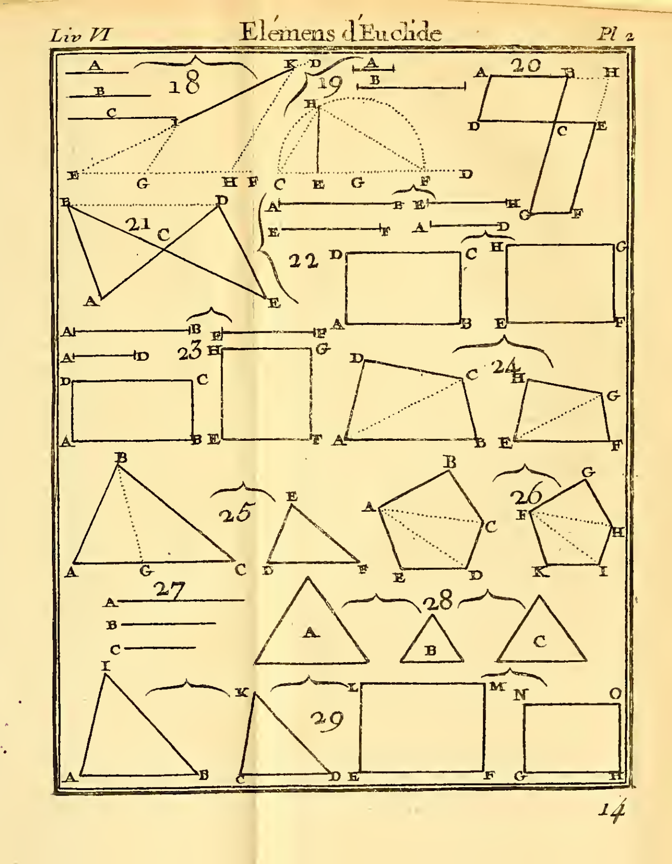

38
39
40
41
42
43
I K L
T V X
F H C
R S O
A E G B
M P Q N
D K
Q
H
F N
L
A B C
O
I P G
E M
V
X
A B C D
Y
Z
E F G H
K
G Y
H
I L
F
D
C
E X
B
A
C X
L
D
A I B
G Y
H M
E K F
C N O
A B
G H
P
I
K
E F L M

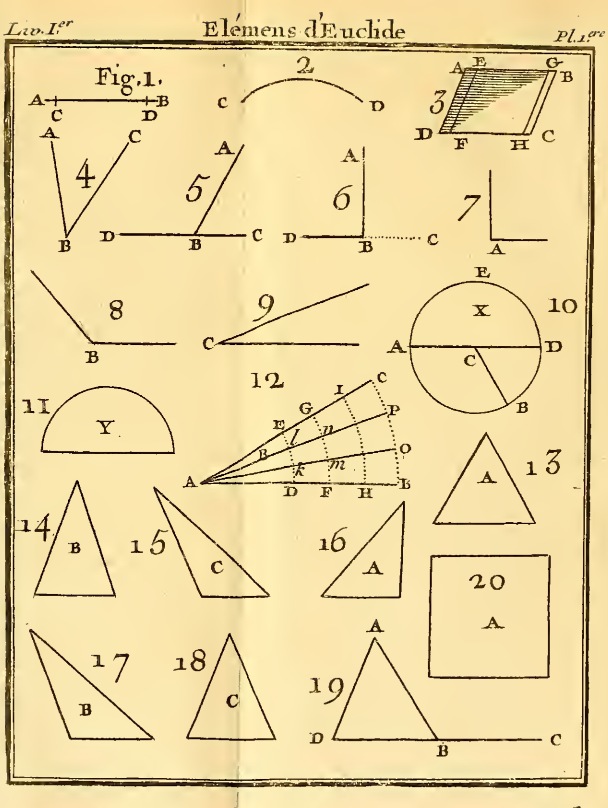

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

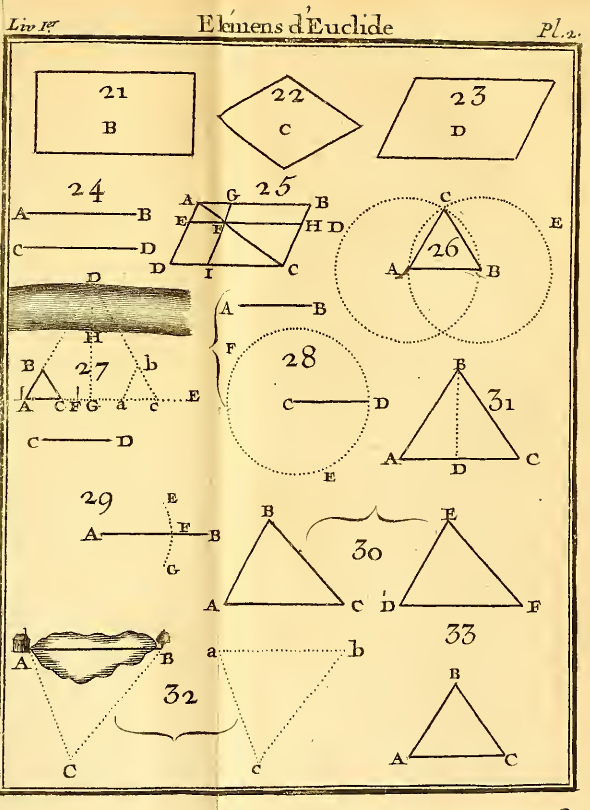

44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60

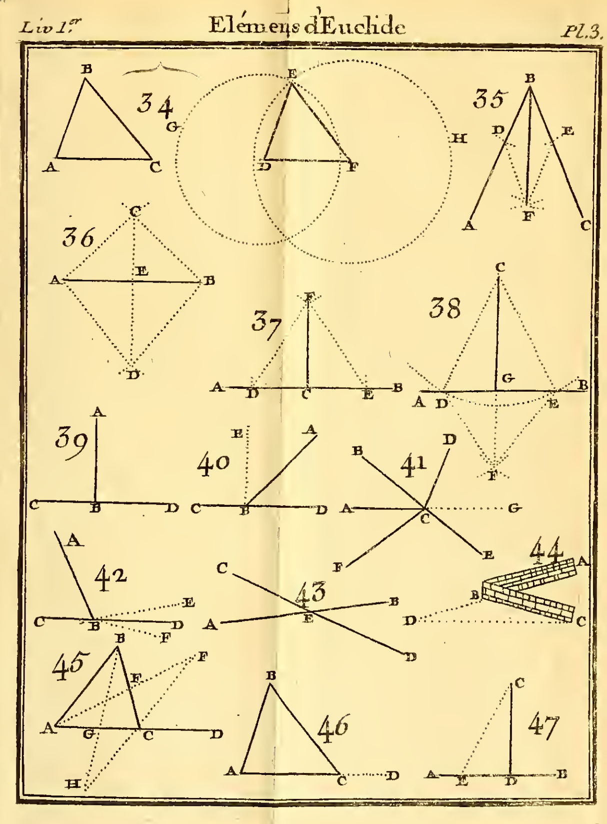


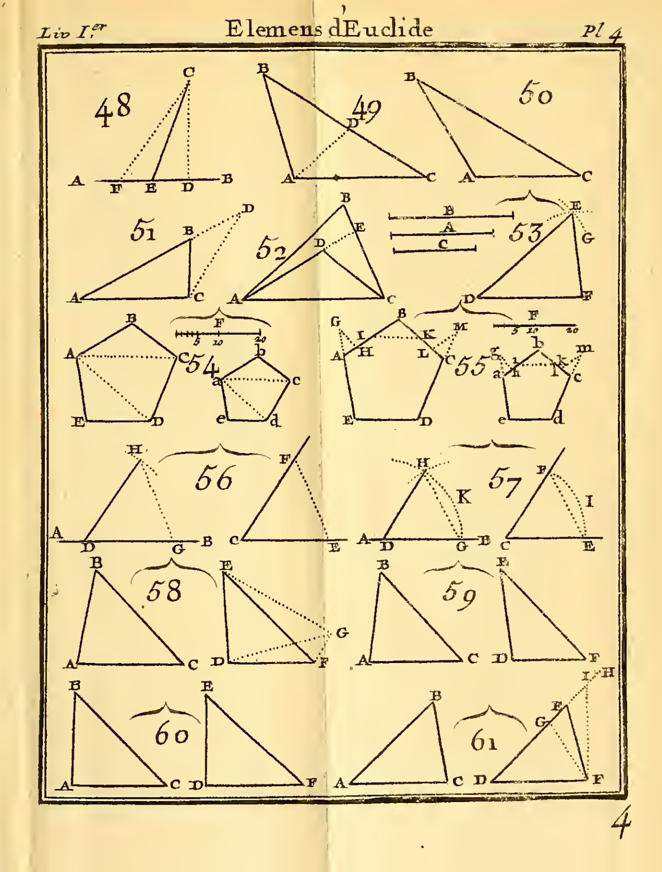


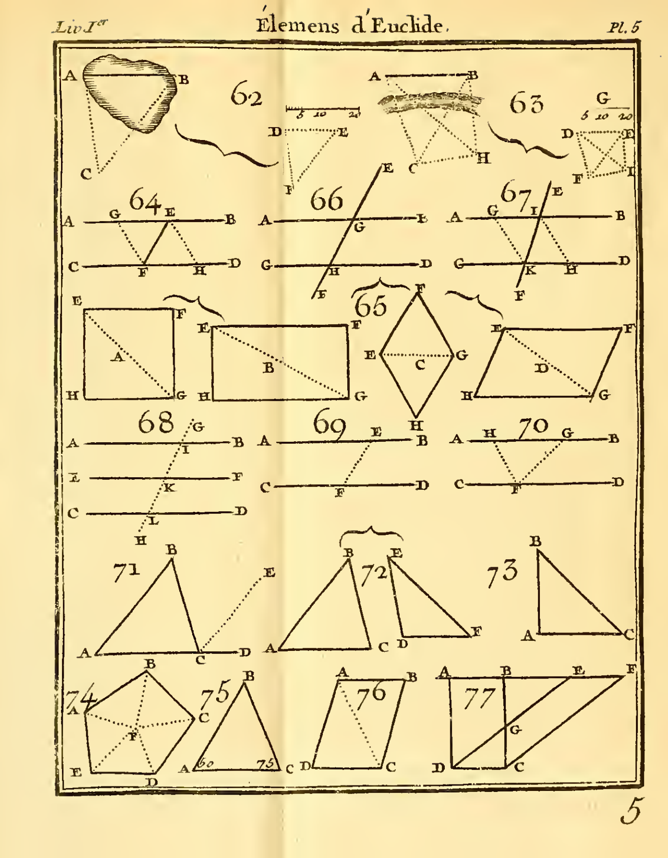

18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29

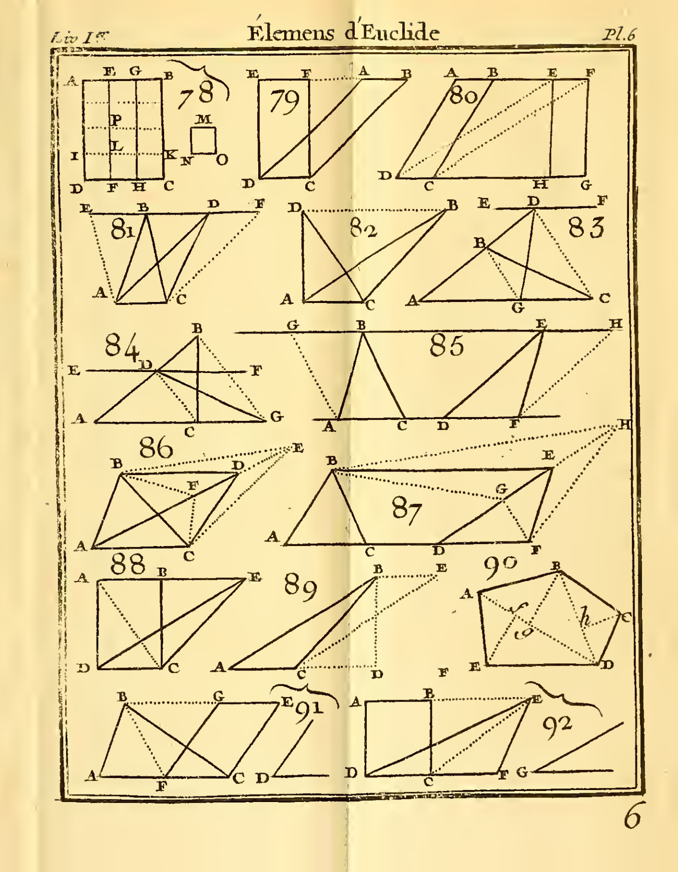

Fig. 1.
A
C
D
B
2
C
D
A
E
G
B
3
D
F
H
C
A
C
4
B
A
5
D
B
C
A
6
D
B
C
7
A
8
B
9
C
E
X
10
A
D
C
B
11
Y
12
C
I
G
P
E
n
l
B
O
m
k
A
D
F
H
L
A
13
14
B
15
C
16
A
20
A
17
B
18
C
A
19
D
B
C


Liv. Ier
Elémens d'Euclide
Pl. 2.
21
B
22
C
23
D
24
A B
C D
25
A G B
E F H D
D I C
26
C
E
A B
27
D
H
B b
A C F G a c E
C D
A B
F
28
C D
E
31
B
A D C
29
E
A F B
G
30
B
A C
E
D F
33
A B
32
C
a b
c
B
A C

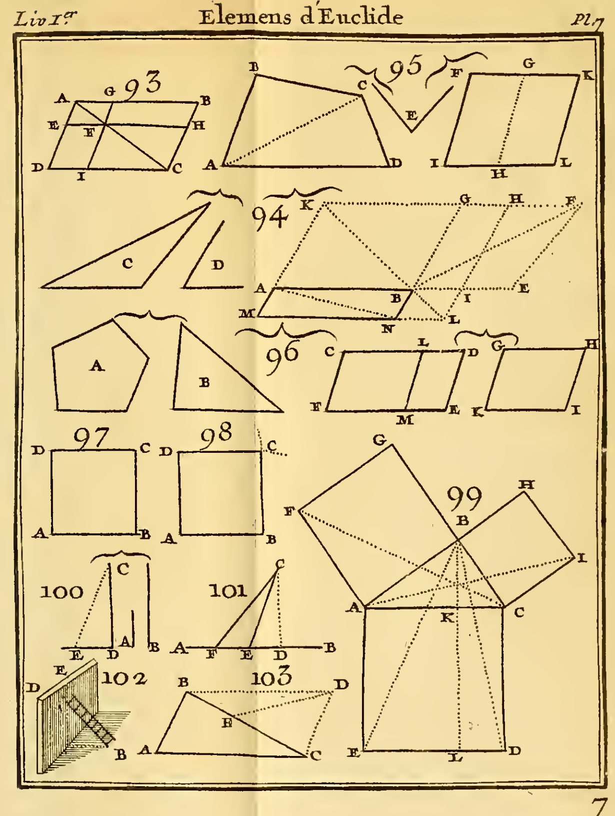

34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47


48
A F E D B C
49
B D A C
50
B A C
51
D B A C
52
B E D A C
53
B A C E G D F
54
F
5 10 20
B A C E D
b a c e d
55
F
5 10 20
G B I K M A H L C E D
g b m a h i l k c e d
56
H A D G B F C E
57
H K A D G B F I C E
58
B A C E G D F
59
B A C E D F
60
B A C E D F
61
B A C I H E G D F


62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77



78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92


93
95
94
96
97
98
99
100
101
102
103





